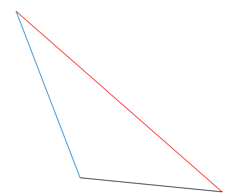
Ejercicio: Encontrar el área de un triángulo “real”, a través de dos fórmulas

Al maestro, o a la maestra:

En este ejercicio, los alumnos calcularán de dos fórmulas, el área de un mismo triángulo “real”. Es decir, el triángulo tiene una orientación arbitraria (en vez de la habitual “base abajo”), y los alumnos tendrán que medir los lados y alturas. Las dos fórmulas que se usarán son la famosa

$$\acute{A}rea = \frac{base \times altura}{2},$$



y La Fórmula de Herón:

$$\acute{A}rea = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

donde *a*, *b*, y *c* son las longitudes de los lados, y $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Los objetivos del ejercicio son los siguientes

- Dar a los alumnos más experiencia con el uso de metros y herramientas de la geometría.
- Enterar a los a alumnos de que las “fórmulas” son constancias de verdades, que tratan de relaciones entre características expresadas por medio de números. Por ejemplo, aquellas entre la extensión de superficie de un triángulo, y las longitudes de sus lados.
- Mostrar a los alumnos, que es imprescindible saber a qué cantidad se refiere cada literal en una fórmula. Las fórmulas nos cuentan verdades, pero no podemos valernos de una fórmula a menos que
  - La cantidad que nos interesa (por ejemplo, el área) aparece en la fórmula, y
  - Sabemos, o podemos encontrar, los valores de las otras cantidades que vienen en la fórmula.
- Abordar la imprecisión de la medición, y de cómo la imprecisión de medición de las dimensiones lineales de un triángulo, conlleva la imprecisión de toda cantidad calculada a partir de ellas. (Por ejemplo, el área.)
- Invitar a los alumnos a reflexionar sobre las ventajas y desventajas de las dos fórmulas que usaron.

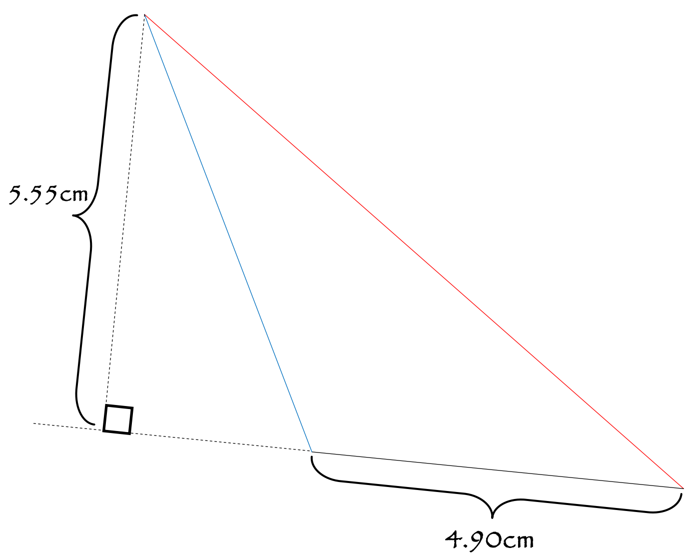
Una vez calculadas las áreas, es bueno escribirlas en el pizarrón, para que los alumnos las examinen a fin de comentar sobre el grado de la variación presente en los resultados que provienen de cada fórmula. Sería bueno también, construir un histograma para facilitar la comparación.

A continuación se presenta la resolución, y el ejercicio.

SOLUCIÓN (Las medidas variarán de un alumno al otro. Las medidas dadas aquí son típicas.)

El área de un mismo triángulo, calculada de dos formas: La fórmula $Á = \frac{b \times h}{2}$, y La Fórmula de Herón

Primero, a través de la fórmula $Á = \frac{b \times h}{2}$ Haremos 3 cálculos, cada uno de los cuales usará un lado diferente como la base del triángulo.

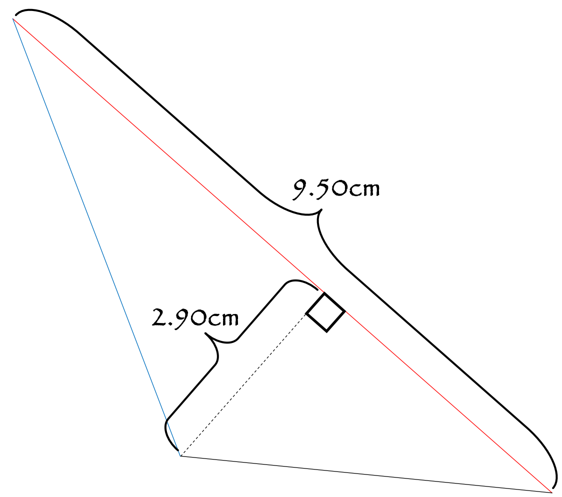


Usando el lado **NEGRO** como la base,

b = 4.90 cm h = 5.55 cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{4.90 \times 5.55}{2}$$

$= \underline{13.6}\ cm^2$

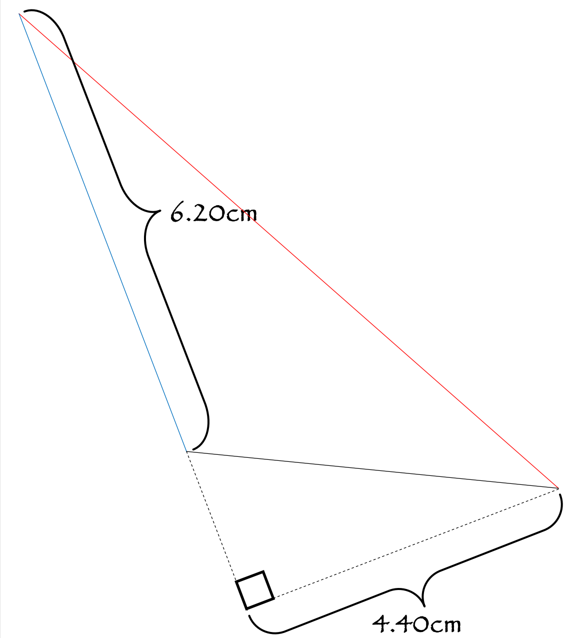


Usando el lado **ROJO** como la base,

b = 9.50 cm h = 2.90 cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{9.50 \times 2.90}{2}$$

$= \underline{13.8}\ cm^2$



Usando el lado **AZUL** como la base,

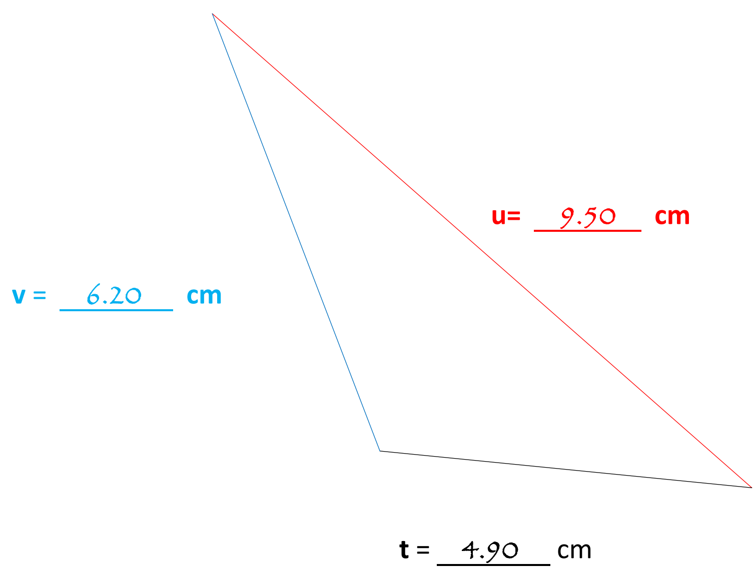
b = 6.20 cm h = 4.40 cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{6.20 \times 4.40}{2}$$

$= \underline{13.6}\ cm^2$

Véase el otro lado.

Segundo, a través de la Fórmula de Herón, la que usa las medidas de los tres lados, y nada más. Primero, usamos los variables **t**, **u**, y **v** para los 3 lados de nuestro triángulo. Apunte para cada lado, la longitud que Ud. encontró para ello en el otro lado de la hoja.



Con esta elección de literales, la Fórmula de Herón nos dice que

$$Área = \sqrt{s(s-t)(s-u)(s-v)}\ ,$$

donde *a*, *b*, y *c* son las longitudes de los lados, y $s = \frac{t+u+v}{2}$.

¡Espantosa! Pero lo haremos poco a poco, a través del siguiente procedimiento:

Calcule **s**, donde $s = \frac{t+u+v}{2} = \frac{4.90 \ + \ 9.50 \ + \ 6.20}{2}$ = 10.30 cm. (s)

Calcule **w**, donde $w = s - t$ = 10.30 - 4.90 = 5.40 cm. (w)

Calcule **x**, donde $x = s - u$ = 10.30 - 9.50 = 0.80 cm. (x)

Calcule **y**, donde $y = s - v$ = 10.30 - 6.20 = 4.10 cm. (y)

Calcule **z**, donde

$z = s \times w \times x \times y$ = 10.30 × 5.40 × 0.80 × 4.10 = 182.43 cm^4. (z)

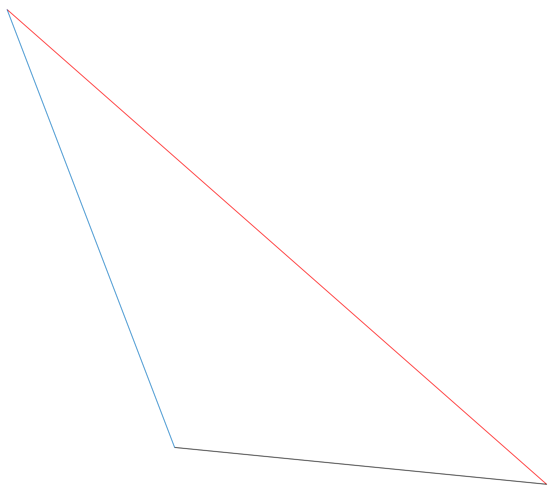
Finalmente,

$\boldsymbol{Área} = \sqrt{\boldsymbol{z}}$ = $\sqrt{182.43cm^4}$ = 13.5 **cm^2.**

Fin de la solución.
El Ejercicio comienza en la página siguiente.

El área de un mismo triángulo, calculada de dos formas: La fórmula $Á = \frac{b \times h}{2}$, y La Fórmula de Herón

Primero, a través de la fórmula $Á = \frac{b \times h}{2}$ Haremos 3 cálculos, cada uno de los cuales usará un lado diferente como la base del triángulo.

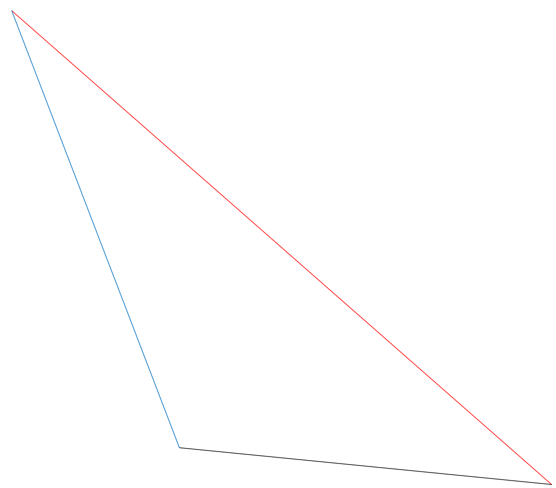


Usando el lado **NEGRO** como la base,

b = ___________ cm h = __________ cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{\qquad \times \qquad}{2}$$

= ______________ cm^2

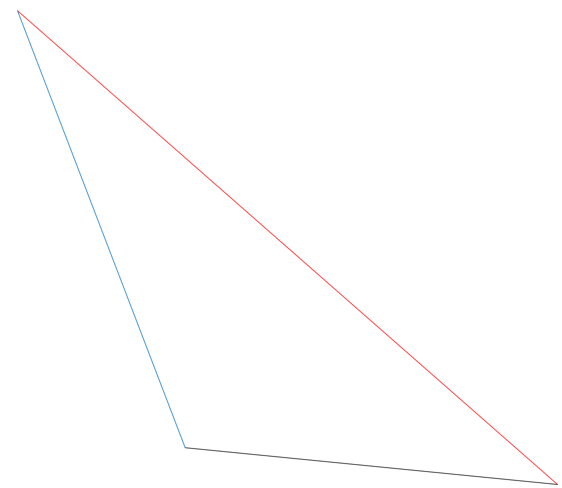


Usando el lado **ROJO** como la base,

b = ___________ cm h = __________ cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{\qquad \times \qquad}{2}$$

= ______________ cm^2



Usando el lado **AZUL** como la base,

b = ___________ cm h = __________ cm

$$Á = \frac{b \times h}{2} = \frac{\qquad \times \qquad}{2}$$

= ______________ cm^2

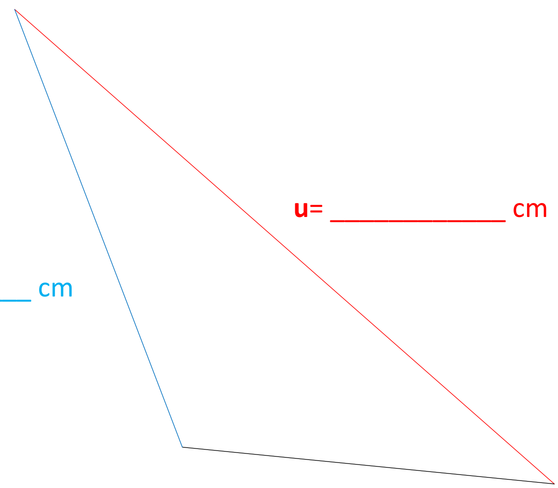
Véase el otro lado.

Segundo, a través de la Fórmula de Herón, la que usa las medidas de los tres lados, y nada más.

Primero, usamos los variables **t**, **u**, y **v** para los 3 lados de nuestro triángulo. Apunte para cada lado, la longitud que Ud. encontró para ello en el otro lado de la hoja.

u= ______________ cm

v = ______________ cm



t = ______________ cm

Con esta elección de literales, la Fórmula de Herón nos dice que

$$Área = \sqrt{s(s-t)(s-u)(s-v)} \ ,$$

donde *a*, *b*, y *c* son las longitudes de los lados, y $s = \frac{t+u+v}{2}$.

¡Espantosa! Pero lo haremos poco a poco, a través del siguiente procedimiento:

Calcule **s**, donde $s = \frac{t+u+v}{2}$ $= \dfrac{\quad + \quad + \quad}{2}$ = ____________________ cm. (s)

Calcule **w**, donde $w = s - t$ = ____________ - _____________ = ______________ cm. (w)

Calcule **x**, donde $x = s - u$ = ____________ - _____________ = ______________ cm. (x)

Calcule **y**, donde $y = s - v$ = ____________ - _____________ = ______________ cm. (y)

Calcule **z**, donde

$z = s \times w \times x \times y$ = __________ × _________ × _________ × _________ = _____________ cm^4. (z)

Finalmente,

$$\boldsymbol{Área} = \sqrt{\boldsymbol{z}} = \sqrt{\rule{6cm}{0.4pt}} = \rule{7cm}{0.4pt}\ \mathbf{cm^2}.$$