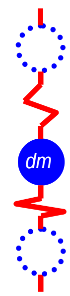
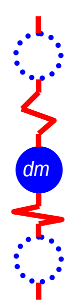
Las Bellezas Matemáticas del Gusano



$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right]=\frac{\pi^3}{32}$$



Introducción

El gusano es un juguete infantil en forma de un resorte de baja resistencia. Debido a la misma, la longitud de un gusano colgado de un soporte puede ser 12 veces mayor que su longitud con las vueltas trincadas.

Un gusano vale más o menos cinco pesos, pero es muy bella la matemática que corresponde a su funcionamiento. Pero, ¡la cosa más bella de todas es el hecho de que las matemáticas tienen cosa cualquiera que ver con su funcionamiento! ¿Por qué es así? Nadie lo sabe: es un gran misterio el que las matemáticas y sus bellezas se encuentran en el funcionamiento de todo el Universo (y no solamente sus gusanos).

En este documento, doy énfasis a esa belleza. Claro que mucha de la matemática es avanzada, pero lo importante es que sí, hasta en las cosas más sencillas se encuentra mucha belleza, que se manifiesta en su matemática. Así que explico detalladamente algunas ideas sencillas, mientras en otras ocasiones presento temas matemáticas avanzadas con poca explicación.

Empiezo por analizar la extensión provocada por su propio peso de un gusano colgado. Después, se analiza el movimiento vibratorio de un gusano colgado. Por medio de eses análisis, derivo ecuaciones que predicen (1) cuánto se estirará un gusano bajo su propio peso; (2) el periodo de la vibración de un gusano colgado; y (3) cómo se relacionan (1) y (2).

Por fin, se examinan los datos empíricos obtenidos de experimentos con gusanos de acero y de plástico, comparando eses datos con el comportamiento predicho por medio de los análisis matemáticos. Como parte de la comparación, se calcula la aceleración gravitatoria a partir de los datos empíricos.

Extensión de un gusano colgado, debido a su propio peso

Empezamos definiendo los símbolos que representan las características que afectan cómo funciona el gusano.

g La aceleración gravitatoria.

M La masa del gusano, por longitud unitaria (por ejemplo, gramos por centímetro, presuntamente constante).

L_{tr} La longitud del gusano cuando no se lo aplica fuerza alguna. (Nótate que en esa condición, todas las vueltas se encuentran trincadas.)

E La resistencia del gusano (presuntamente constante), cuya magnitud se define según $F = E \times (\Delta l / l)$, donde Δl significa cuánto se estira un trozo de longitud inicial l, al ser aplicado a la misma una fuerza constante F.

¡Nótate que E **no** es el constante k de "Hooke" del gusano! Ese último se define según $F = k \times \delta$, donde δ significa cuánto se estira el resorte cuando la fuerza F actúa sobre el resorte entero.

Ahora, hagamos cuenta que colgamos el gusano de un soporte fijo, pero que no lo saltamos. (Figura 1a) Todas las vueltas quedan trincados. Para cada punto del gusano, definimos x como la distancia vertical entre ese punto y el soporte. Supongamos que soltamos el gusano, y que esperamos hasta que se hayan cesado todas las vibraciones. Cuando el resorte está en esa condición, se dice que está *en equilibrio* (Figura 1b). Definimos $z(x)$ como la distancia vertical, medida en el gusano en equilibrio, entre el soporte y el punto que quedaba a una distancia x del mismo soporte antes de soltar el gusano.

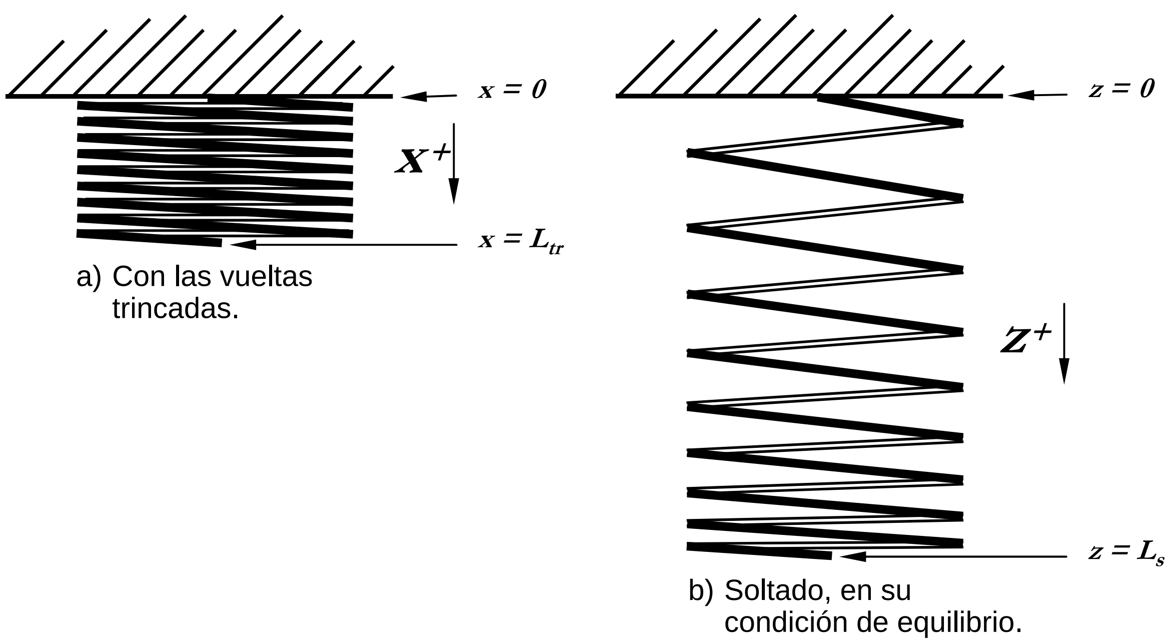


Figura 1. El gusano colgado de un soporte.

Derivemos una ecuación que relaciona x y $z(x)$. Lo hacemos considerando cuánto se estira un trozo de longitud infinitesimal dx, que quedaba entre x y $x+dx$ en el gusano antes de soltarlo. Claro que en equilibrio, ese trozo debe soportar el peso de la porción del gusano que se encontraba entre $x+dx$ y L_{tr}. Como dx es infinitesimal, ignoramos la longitud "dx", y decimos que la porción soporta el peso de una porción de longitud L_{tr}-x; es decir, que el trozo soporta un peso

$$P(x) = Mg(L_{tr} - x)\,. \tag{1}$$

Soportando ese peso, el trozo se estira según la definición de E. Entonces, la longitud infinitesimal dz en el gusano colgado que corresponde a dx sería

$$dz = dx + \frac{Mg(L_{tr} - x)}{E}dx = \left[1 + \frac{Mg(L_{tr} - x)}{E}\right]dx\,. \tag{2}$$

Para encontrar la distancia z que corresponde a x, integramos Ecuación (2):

$$\int_{z=0}^{z} dz = \int_{x=0}^{x}\left[1 + \frac{Mg(L_{tr} - x)}{E}\right]dx\,,$$

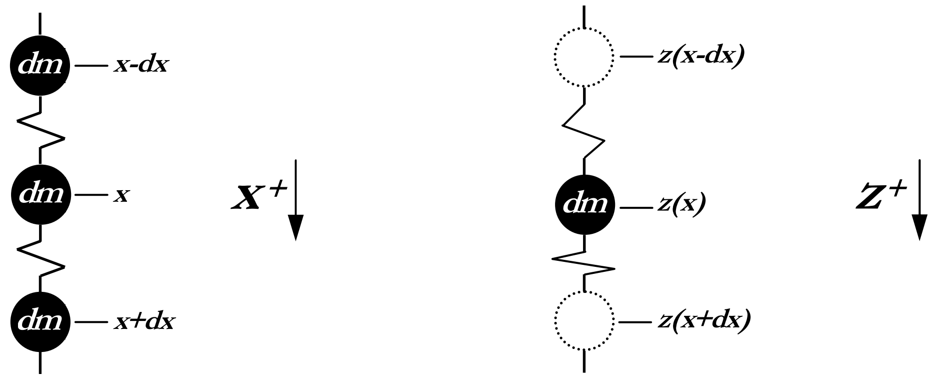
y sale como resultado

$$z(x) = \left[1 + \frac{MgL_{tr}}{E}\right]x - \frac{Mg}{2E}x^2\,. \tag{3}$$

¿Qué sería la longitud total del gusano soltado (L_s)? Esa longitud corresponde a $x = L_{tr}$, la cual, sustituido en (3), da como resultado

$$L_s = L_{tr} + \left(\frac{Mg}{2E}\right)L_{tr}^2\,. \tag{4}$$

Hay otra forma de derivar Ecuación (3), misma que nos ayudará a continuación a analizar el gusano vibrando. Empecemos dándonos cuenta de que en verdad, las vueltas del gusano se deforman por torsión, pero lo observado es que el gusano se extiende conforme a la definición de E. Entonces, supongamos que cualquier trozo del gusano, de cualquier longitud, se extiende según la misma. Además, supongamos que el gusano puede modelarse como un conjunto de masas infinitesimales dm, todas conectadas de resortes sin masa, de longitudes iguales dx, y cuya resistencia E es igual a la del gusano mismo. Puede construirse ese conjunto, por lo menos en la imaginación, cortando el gusano en trozos de longitud dx, juntando toda su masa en cuentas (siendo la masa de cada una Mdx), y conectándolas con dichos resortes (Figura 2a).



a) Tres cuentas con masa *dm* en las posiciones que ellas ocupan cuando las vueltas del gusano están trincadas.

b) La posición *z(x)*, en el gusano colgado, de la cuenta que se encuentra en la posición *x* cuando las vueltas están trincadas. También se ven las posiciones de sus cuentas "vecinas".

Figura 2. El gusano modelado como un conjunto de cuentas y resortes.

Detengámonos un momento para comentar sobre este modelo. Por supuesto, el conjunto de cuentas y resortes que ideamos no se parece mucho a un gusano, pero la verdad es que frecuentemente, un modelo tal (es decir, uno que equivale un objeto a un conjunto de masas discretas conectadas de resortes sin masa) capta muy bien las características vibratorias claves del objeto. ¿Cómo puede ser esto? ¿Cómo puede ser que un modelo tan incompleto nos permite aproximar tan bien el comportamiento verdadero del objeto?

Esta clase de pregunta se ha contemplado con frecuencia por los más ilustres filósofos y científicos. Es un ejemplo de lo que estos ilustres quieren decir al preguntar, ¿Cómo es posible saber cosa cualquiera, sin tener que saber *todo*? Algunos científicos creen que dios (sea cual fuera este "dios") creó el Universo así con intención, para que el ser humano lo pudiera comprender, al menos en cierto grado, y por eso lo creó para que se pueda comprender poco a poco, por reiteradas aproximaciones a la verdad.

Bueno. Volvamos al modelo compuesto de cuentas y resortes. Imagínate que sea colgado el conjunto. Consideremos la situación de la cuenta que ocupaba la posición x antes de ser colgado el gusano (Figure 2b). Son tres las fuerzas que actúan sobre la cuenta:

1) F_P, la fuerza debida a su propio peso, = $(Mdx)g$. Escribiéndola así, como una cantidad de signo positivo, tomamos en cuenta que F_P actúa en la dirección positiva de z.

2) F_z^+, la fuerza debida al resorte que quedaba entre x y $x+dx$; mismo que ocupa el lugar entre z y $z+dz$ en el resorte colgado. La magnitud de esa fuerza se calcula según la definición de E: $F = E \times (\Delta l / l)$. En el presente caso, l, la longitud inicial del resorte, sería la longitud del mismo antes de soltar el gusano. Es decir, $l = dx$. Sería Δl la diferencia entre su longitud en el gusano soltado, y su longitud inicial dx. Claro que su longitud en el gusano colgado es $[z(x+dx) - z(x)]$, entonces

$$F_z^+ = E \times \frac{\{[z(x+dx) - z(x)] - dx\}}{dx}.$$

Nótate que esa última nos indica la dirección de F_z^+ también: cuando $z(x+dx) > z(x)$, entonces $F_z^+ > 0$, la cual significa que F_z^+ actúa en la dirección positiva de *z*. Al contrario, F_z^+ actúa en la dirección negativa de *z* si F_z^+<0. Si $z(x+dx) = z(x)$, entonces F_z^+=0.

3) F_z^-, la fuerza debida al resorte que quedaba entre *x* y *x-dx*; mismo que ocupa el lugar entre *z* y *z-dz* en el resorte colgado. Analizando de la misma técnica que usamos en cuanto a F_z^+, llegamos a

$$F_z^- = E \times \frac{\{[z(x) - z(x-dx)] - dx\}}{dx}.$$

Ahora, igualamos la suma vectorial de las tres fuerzas al producto de la masa (*Mdx*) y la aceleración de la cuenta. Como todas las fuerzas actúan solamente en la dirección *x*, con sus direcciones implícitas en las correspondientes ecuaciones mismas, esa suma vectorial no es sino la suma de las expresiones para las tres fuerzas.

En cuanto a la aceleración, la cuenta se mueve solamente en la dirección *x*, luego la suma vectorial se simplifica a una suma escalar. Tomando en cuenta el que cuando el gusano se encuentra en su condición del equilibrio, la aceleración de cualquier punto es igual a cero,

$$\underbrace{(Mdx)g}_{(F_P)} + \underbrace{E \times \frac{\{[z(x+dx) - z(x)] - dx\}}{dx}}_{(F_z^+)} - \underbrace{E \times \frac{\{[z(x) - z(x-dx)] - dx\}}{dx}}_{(F_z^-)} = (Mdx) \times 0, \qquad (5)$$

luego

$$\frac{\left[\frac{\{[z(x+dx) - z(x)] - dx\}}{dx} - \frac{\{[z(x) - z(x-dx)] - dx\}}{dx}\right]}{dx} = \frac{d}{dx}(z') = -\frac{Mg}{E},$$ y por fin,

$$z'' = -\frac{Mg}{E}, \qquad (6)$$

donde z' y z'' son, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de *z* con respecto a *x*.

Podemos resolver (5) con facilidad integrándola, dadas las condiciones fronteras (es decir, las condiciones que prevalecen en los extremos del gusano) que le corresponden. Pero, ¿qué serían? Claro que una condición es $z(x=0) = 0$, porque el extremo superior del gusano es fijado en el soporte. La otra condición es $z'(x=L_{tr})=1$. ¿Cómo es eso? Nótate que cualquier trozo del gusano se extiende solamente por el peso de la porción del gusano que le queda debajo. Como al trozo inferior no le queda nada de peso debajo, no hay nada de fuerza para estirarlo. Por eso, la longitud *dx* del último trozo no cambia al ser colgado el gusano, luego su longitud *dz* en el gusano colgado es igual a *dx*, entonces $z'(x=L_{tr})=1$.

Resolvamos Ecuación (6). La escribimos con las condiciones que le corresponden como

$$z'' = -\frac{Mg}{E}, \quad z'(L_t) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Como $z' = \int z'' dx + C_1$, donde C_1 es alguna constante,

$$z' = -\frac{Mg}{E} x + C_1.$$

Claro que $C_1 = 1 + \frac{MgL_{tr}}{E}$, para que z' (x=L_{tr})=1. Luego

$$z'(x) = \left[1 + \frac{MgL_{tr}}{E}\right] - \frac{Mg}{E} x \quad .$$

De la misma manera, $z = \int z' dx + C_2$, y como $z(x=0) = 0$, $C_2=0$, entonces

$$z(x) = \left[1 + \frac{MgL_{tr}}{E}\right] x - \frac{Mg}{2E} x^2, \text{ como en Ecuación (3).}$$

Ahora, deberíamos considerar el hecho de que el gusano gira al extenderse. Creo yo que esto no importa en el caso de un gusano que está en equilibrio (es decir, que no está vibrando): el valor de E empírico incluye ese comportamiento, y la extensión que queremos calcular lo incluye también. Así que todo es consistente: la extensión se calcula usando un valor de E que corresponde al mismo comportamiento. Pero, ¿se pude calcular la extensión de un gusano vibrando a partir de un valor de E que corresponde a la extensión de un gusano en equilibrio? Tratamos esa cuestión en la sección que sigue.

El gusano vibrando

En esta sección, tratamos el caso de un gusano que se suelta al tiempo $t = 0$.

Volvamos a Ecuación (5). Cuando el gusano está vibrando, la aceleración ya no es igual a cero. Tampoco es la distancia entre el soporte y cualquiera punto determinado del resorte una función de x sólo, sino una función de x y del tiempo t también.

Para evitar una confusión, definimos la función

> $y(x,t)$ = la distancia, en el tiempo t, entre el soporte y el punto del resorte que se encuentra a la distancia x del soporte en el gusano con vueltas trincadas.

Las mismas ideas que se usaron para derivar Ecuación (5) para el gusano en su condición de equilibrio se pueden usan también para derivar una ecuación análoga para el gusano vibrando. Debido a que el gusano sí está vibrando, tenemos que considerar la cuenta en un tiempo determinado t, luego se necesita usar derivadas parciales, siendo $\partial^2/\partial t^2$la aceleración de la cuenta que se encuentra en la posición $y(x,t)$. No vamos a tomar en cuenta la resistencia del aire, ni cualquiera otra clase de fricción. Así que después de unas cuantas simplificaciones, la ecuación análoga a la (6) sería

$$\frac{Mg}{E} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ . \tag{7}$$

Ya nos toca tomar en cuenta la rotación del gusano. La verdad es que la fuerza de extensión que actúa sobre cada porción del gusano lo hace girar además de acelerar en la dirección de x. Como nuestro modelo del gusano (es decir, el que corresponde a Figura 2) dice que toda la fuerza se convierte en aceleración, nuestro modelo sobrestimará la aceleración, y en consecuencia, sobrestimará la frecuencia de la vibración. ¿En qué grado los sobrestimará? Esto dependerá de las características del gusano, inclusos sus dimensiones.

Ecuación (7) nos resultaría bien difícil resolverla; por eso buscamos transformarla en una que no tenga una constante aditivo. (Es decir, Mg/E.) Pero, ¿cómo transformarla?

Prestemos una idea que se usa para analizar las vibraciones de un peso colgado de un resorte. Precisamente, la de calcular sus vibraciones alrededor de su punto del equilibrio. Con base en esta idea, definimos

$$r(x,t) = y(x,t) - z(x).$$

(Recuérdate que $z(x)$ es la ubicación, en la condición del equilibrio, del punto que se encuentra a la distancia x del soporte cuando las vueltas del gusano están trincadas.)

Para transformar Ecuación (7), sustituimos $r(x,t) + z(x)$ por $y(x,t)$ en dicha ecuación:

$$\frac{Mg}{E} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{M}{E}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\ .$$

Ya que z es una función de x solo, $\partial^2 z/\partial t^2 = 0$. Además, $\partial^2 z/\partial x^2 = d^2z/dx^2 = -Mg/E$, y, por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{M}{E}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\ . \tag{8}$$

Ésta tiene la forma de la bien conocida *ecuación de la onda*. Se puede resolver de maneras igualmente bien conocidas (que miraremos enseguida) por ser *separable*, misma que quiere decir que se puede resolver suponiendo que $r(x,t)$ es el producto de dos funciones: una de x solo, y la otra de t solo:

$$r(x,t) = \left[X(x)\right]\left[T(t)\right] \quad . \tag{9}$$

Con esta idea, (8) se transforma en

$X''T = \dfrac{M}{E} XT''$, la cual se transforma en

$$\frac{X''}{X} = \frac{M}{E}\frac{T''}{T} \quad . \tag{10}$$

Por razones que no consideramos aquí, se iguala (10) a alguna constante $-\lambda^2$, con $\lambda>0$, que todavía desconocemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{M}{E}\frac{T''}{T} = -\lambda^2, \quad \lambda > 0 \quad . \tag{11}$$

La resolución de (11) nos lleva a que

$X(x) = A\cos\lambda x + B\operatorname{sen}\lambda x$, y

$T(t) = C\cos\lambda\sqrt{\dfrac{E}{M}}t + D\operatorname{sen}\lambda\sqrt{\dfrac{E}{M}}t$, luego

$$r(x,t) = \left[A\cos\lambda x + B\operatorname{sen}\lambda x\right]\left[C\cos\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t + D\operatorname{sen}\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t\right] , \tag{12}$$

donde *A*, *B*, *C*, y *D* son constantes.

Ahora, encontramos las constantes a partir de las condiciones iniciales y fronterizas. Como una condición fronteriza, nótate que el extremo superior del gusano es fijado al soporte, $r(x = 0, t) = 0$ para todo t. Esto significa que $A = 0$. Como un ejemplo de una condición inicial, ya especificamos que el gusano se suelta a $t = 0$, de manera que la velocidad de cada punto x sea cero cuando $t = 0$. Escrita de otra manera,

$\dfrac{\partial r}{\partial t}(x, t = 0) = 0$, luego D = 0.

Si combinamos las constantes *B* y *C* en una sola constante *F*,

$$r(x,t) = F\operatorname{sen}(\lambda x)\cos\left(\lambda\sqrt{\frac{E}{M}}t\right) \quad . \tag{13}$$

Para determinar λ, usamos una condición fronteriza más, que tal vez nos sorprenda:

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x = L_{tr}, t) = 0 \text{ para todos los tiempos } t. \tag{14}$$

Esta última resulta de que $dz/dx = 1$ a $x = L_{tr}$ (véate la discusión que sigue Ecuación [6]), y de que, por razones semejantes, $\partial y/\partial x = 1$ también en dicho extremo. Como $r(x,t)$ es la diferencia entre $y(x,t)$ y $z(x)$, la derivada de $r(x,t)$ con respecto a x es la diferencia entre $\partial y/\partial x$ y dz/dx, o sea, cero.

Tengo que confesar que esto me eludió por mucho tiempo cuando probé resolver este problema. Una vez comprendido que $\partial y/\partial x(L_{tr},t) = 0$ para todo tiempo t, la solución se encuentra con facilidad (¡y tras un poco de trabajo!). Qué bonito es, que la transformación que hizo separable la ecuación diferencial, también cambió la condición fronteriza correspondiente a $x = L_{tr}$ en una que hizo más fácil la solución. Cosas de este estilo pasan con frecuencia en la ciencia y la matemática. Dios nos proporciona esas mercedes; ¡la culpa no la tiene Él si yo no soy lo suficiente apto como para aprovecharlas!

Bueno. Ecuación (14) exige o que λ sea 0, o que λL_{tr} sea $(n+½)\pi$, con $n \geq 0$. La solución $\lambda = 0$ no funciona para movimientos vibratorios, pero la condición fronteriza se puede satisfacer por cualquier de la infinidad de los valores $\lambda_n = [(n+½)\pi]/L_{tr}$ $n \geq 0$, con la $r_n(x,t)$ y la F_n que le corresponden:

$$r_n(x,t) = F_n \operatorname{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right]\cos\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right],$$

cuya suma es igual a $r(x, t)$:

$$r(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \operatorname{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right]\cos\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right]. \qquad (15)$$

Entonces, hay que encontrar los F_n para obtener la solución. Pero, ¿cómo? Al parecer, no existe la manera de encontrar los valores de cada uno de una infinidad de constantes. ¡Tampoco es obvio que la suma converja a $r(x,t)$ para todo (x,t) que nos interesen!

Pero una de las cosas más bonitas con respecto a este problema es que en verdad, sí, la suma converge, y sí, existe la manera de encontrar los F_n. Ecuación (15) es un ejemplo de lo que se llama una *serie de Fourier*, y los F_n se encuentran aprovechando lo que se expresa por la frase *el conjunto de las funciones sen*$(n\pi x/c)$ *es ortogonal sobre el intervalo* $-c \le x \le +c$, frase que significa

$$\int_{x=-c}^{x=c} \operatorname{sen}\left(\frac{n_1\pi}{c}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_2\pi}{c}x\right)dx = 0 \text{ siempre que } n_1 \neq n_2. \qquad (16)$$

El uso de series Fourier es un tema muy amplio y bonito, pero aquí, nos restringimos al encontrar los F_n que nos indican lo que pasa cuando un gusano con vueltas trincadas se suelta a $t = 0$. Empezamos dándonos cuenta de que $r(x,t = 0)$ en este caso es

$$r(x,t=0) = \underbrace{x}_{\substack{y(x,t=0)=\text{ la posicion de}\\ x \text{ en el gusano}\\ \text{trincado.}}} - z(x) = x - \underbrace{\left\{\left[1+\frac{MgL_{tr}}{E}\right]x - \frac{Mg}{2E}x^2\right\}}_{z(x)} = \frac{Mg}{E}\left[\frac{x^2}{2} - L_{tr}x\right]. \qquad (17)$$

Y como Ecuación (15) nos indica que

$$r(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right] \text{ (porque el coseno de cero es uno),}$$

tenemos (igualando Ecuaciones [15] y [17])

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right]=\frac{Mg}{E}\left[\frac{x^2}{2}-L_{tr}x\right]. \tag{18}$$

Resulta que los senos en este última integran un conjunto ortogonal sobre el intervalo $-L_{tr} \le x \le +L_{tr}$. Sin embargo, valores de x menores de cero no tienen sentido en nuestro problema. Entonces, ¿cómo aprovechar la ortogonalidad de los senos?

Como el seno es una función impar (es decir, sen[-x] = -sen[x]), la manera usual de tratar con este problema consiste en figurar una función $f(x)$, la cual es *una extensión impar* del lado derecho de Ecuación (18):[1]

$$f(x)=\left\{\frac{Mg}{E}\left[\frac{x^2}{2}-L_{tr}x\right]\text{para } x\ge 0, \quad \text{y} \quad f(x)=-\frac{Mg}{E}\left[\frac{x^2}{2}-L_{tr}x\right]\text{, para } x<0\right.,$$

de manera que Ecuación (18) se cambia en

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right]=f(x). \tag{19}$$

Este artificio nos permite encontrar cualquier F_k multiplicando ambos lados de (19) por sen[$(k + ½)\pi x/L_{tr}$] y integrando entre $x = -L_{tr}$ y $x = L_{tr}$:

$$\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} \text{sen}\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]\sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{sen}\left[\frac{(n+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx=\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} f(x)\text{sen}\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx. \tag{20}$$

Gracias a la ortogonalidad, las integrales de todos los productos de los senos en el lado izquierdo igualan a cero, excepto el para lo cual $k = n$. Siendo así el caso, tenemos

$$\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} F_k \text{sen}^2\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx=\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} f(x)\text{sen}\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx, \tag{21}$$

y como

$$\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} \text{sen}^2\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx=L_{tr},$$

$$F_k=\frac{1}{L_{tr}}\int_{x=-L_{tr}}^{x=L_{tr}} f(x)\text{sen}\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx=\frac{2}{L_{tr}}\int_{x=0}^{x=L_{tr}} f(x)\text{sen}\left[\frac{(k+½)\pi}{L_{tr}}x\right]dx, \tag{22}$$

[1] Véate Rainville y Bedient, *Ecuaciones Diferenciales*, Quinta Edición (Nueva Editorial Interamericana, 1977) p. 414.

este último resultado debido a que $f(x)$ y sen$[(k + ½)\pi x/L_{tr}]$ son funciones impares, de modo que su producto es una función par. Es de notarse que ¡no vamos a integrar sobre los valores negativos de x! Entonces, no era necesario idear la extensión impar, pero esto hizo más clara (espero) la explicación.

Es de notarse también que el procedimiento usado aquí no siempre funciona de una manera tan directa; hay que la función $f(x)$ tenga varias propiedades que en nuestro caso sí las tiene.[2]

Bueno, ahora encontremos los F_n. Ya que

$$\int x sen ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{sen ax}{a^2}, \text{ y}$$

$$\int x^2 sen ax dx = -\frac{x^2 \cos ax}{a} + \frac{2x sen ax}{a^2} + \frac{2\cos ax}{a^3}$$, tenemos (tomando en cuenta que $[(n + ½)\pi]/L_{tr} = [(2n + 1)\pi]/2L_{tr}$)

$$F_n = -16\left(\frac{Mg}{E}\right)\left\{\frac{L_{tr}^2}{[(2n+1)\pi]^3}\right\} \tag{23}$$

; de manera que

$$r(x,t) = -\left(\frac{16}{\pi^3}\right)\left(\frac{MgL_{tr}^2}{E}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^3}\right]\text{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}x\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right], \quad \text{y} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \left[1 + \frac{MgL_{tr}}{E}\right]x - \frac{Mg}{2E}x^2 \\ &\quad - \left(\frac{16}{\pi^3}\right)\left(\frac{MgL_{tr}^2}{E}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^3}\right]\text{sen}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}x\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Para $x = L_{tr}$, ésta se convierte en

$$y(L_{tr},t) = L_{tr} + \left(\frac{MgL_{tr}^2}{2E}\right)\left\{1 - \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right]\right\}. \tag{26}$$

Examinando de cerca este resultado, se nota algo interesante y bonito. Cuando $t = 0$, $y(L_{tr}, t)$ debe igualar a L_{tr}, así que la expresión entre {} debe igualar a cero. Como cos(0)=1, esto exige, por extraño que parezca, que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right] = \frac{\pi^3}{32}.$$

[2] *Ibid.* pp. 427-431

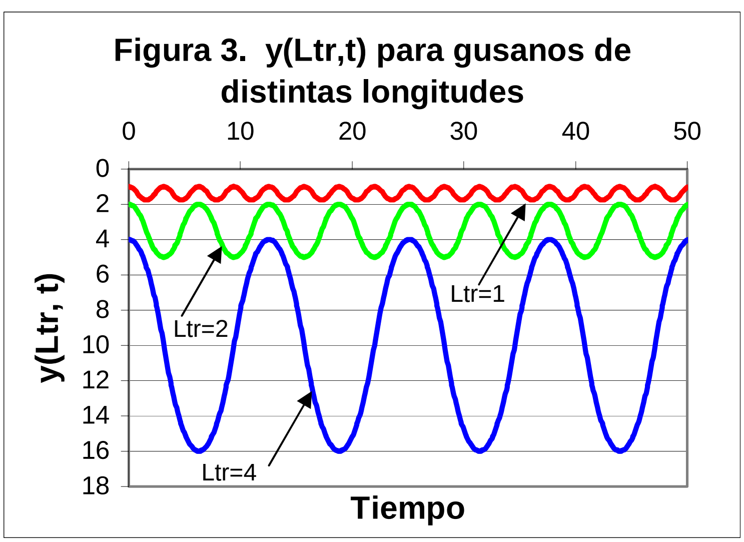
Y, ¡así es! Aquí tiene una tabla de sumas parciales, es decir, sumas en las cuales n toma los valores 0 hasta N, siendo N algún número especificado:

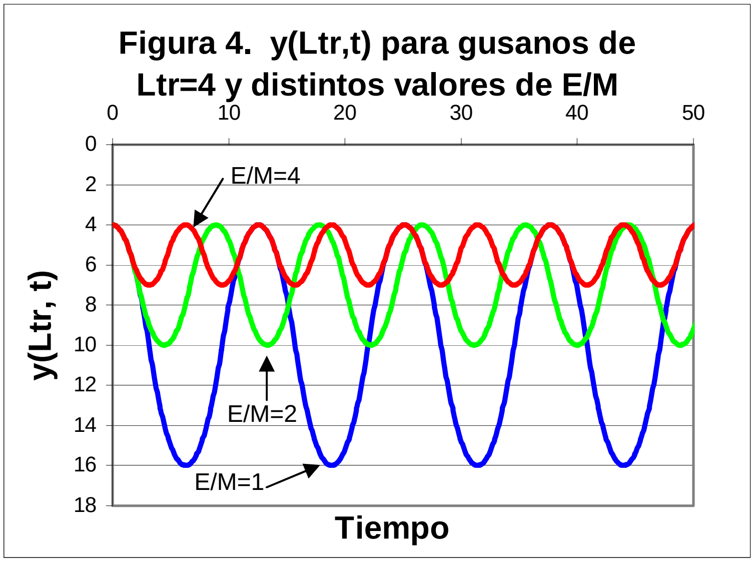
Tabla 1. Sumas parciales de $(-1)^n/(2n + 1)^3$ y el valor verdadero de $\pi^3/32$.

N	Suma para n=0 a N	Valor verdadero de $\pi^3/32$
0	1.000000000000000	**0.968946146259369**
1	0.962962962962963	
2	0.970962962962963	
5	0.968667938379500	
10	0.968992535695423	
20	0.968952872196344	
50	0.968946617149143	
100	0.968946206912337	
200	0.968946153955559	
500	0.968946146756380	
1000	0.968946146321683	

Éste es sólo un ejemplo de las muchas bellezas matemáticas con las cuales Dios dotó su Creación, para deleitarnos al descubrirlas.

Examinemos unas cuantas gráficas para entender cómo la longitud y la razón E/M afectan la frecuencia y amplitud de la vibración del gusano según Ecuación (26). Figura 3 contrasta $y(L_{tr},t)$ con t para tres gusanos de distintas L_{tr} y la misma E/M, y Figura 4 contrasta $y(L_{tr},t)$ con t para tres gusanos de distintas E/M y la misma L_{tr}. Para todas las curvas en dichas Figuras, la suma en Ecuación (32) se truncó a n = 30.





Se notará que las amplitudes de las vibraciones no disminuyen con tiempo. Eso es porque el modelo no incluye fricciones. Se notará también que las curvas se parecen a curvas seno sencillas, aunque son sumas de 30 términos trigonométricos. La explanación es interesante.

Nuestra función $f(x)$ es una parábola que se parece mucho a una curva seno entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Por consiguiente, una curva seno correspondiente a $n = 0$ con la amplitud apropiada aproxima bien la función $f(x)$. Las curvas seno de $n > 0$ solo sirven de corregir las pequeñas diferencias entre $f(x)$ y la curva seno de $n = 0$. Por consiguiente, $F_{n=o}$ es mucho mayor que cualquiera otra F_n (véate Ecuación[23]), y como resultado, las curvas en las Figuras 3 y 4 se parecen mucho a curvas seno sencillas.

Examinando de cerca estas curvas, puede confirmarse dos características más de las vibraciones predichas por Ecuación (26). Primero, la amplitud es proporcional a la cuadrada de L_{tr}. Segundo, el periodo (es decir, cuánto tiempo pasa entre máximos o mínimos sucesivos) es proporcional a L_{tr} y inversamente proporcional a la raíz cuadrada de E/M. El periodo se puede calcular de la siguiente manera.

Ya que la vibración dominante corresponde a $n = 0$, Ecuación (26) nos indica que el valor de $y(L_{tr},t)$ debe repetirse cada vez que el valor de $\cos\{[\pi/(2L_{tr})](E/M)^{½}t\}$ se repite. Como el valor de $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$, el valor de $\cos\{[\pi/(2L_{tr})](E/M)^{½}t\}$ se repite en intervalos de tiempo que corresponden a intervalos de 2π en la cantidad $[\pi/(2L_{tr})](E/M)^{½}t$. Entonces, denominando como t_1 y t_2 a dos tiempos sucesivos en los cuales $\cos\{[\pi/(2L_{tr})](E/M)^{½}t\}$tenga el mismo valor, tenemos

$$\frac{\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t_2 = \frac{\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t_1 + 2\pi,$$ de modo que el periodo T de la vibración sería

$$T = t_2 - t_1 = 4L_{tr}\sqrt{\frac{M}{E}}\,. \tag{27}$$

En la siguiente sección, veremos si estas predicciones cuadran con datos empíricos.

Bueno, como ya hemos tratado muchos temas, hagamos un resumen.

Resumen

1. Un gusano colgado, pero no vibrando, debe estirarse según

   $$L_s = L_{tr} + \left(\frac{Mg}{2E}\right)L_{tr}^2 \cdot$$ (Ecuación [4])

2. Un gusano trincado y fijado en un soporte, soltado a t = 0, debe vibrarse según

   $$y(L_{tr}, t) = L_{tr} + \left(\frac{MgL_{tr}^2}{2E}\right)\left\{1 - \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L_{tr}}\sqrt{\frac{E}{M}}t\right]\right\}$$, con periodo

   $$T = 4L_{tr}\sqrt{\frac{M}{E}}.$$ (Ecuaciones [26] y [27])

3. El modelo a partir del cual estas últimas fueron desarrolladas no toma en cuenta la fricción ni el giro del gusano.

4. Para resolver la ecuación diferencial que surgió de dicho modelo, se transformó la ecuación de tal manera que ésta resultara *separable*, y las condiciones fronterizas más tratables.

5. La técnica de solucionar la ecuación diferencial con sus correspondientes condiciones iniciales y fronterizas, usó de las *series Fourier* y la propiedad de la *ortogonalidad*.

6. Nadie sabe por qué la matemática tiene cosa alguna que ver con el funcionamiento de cosas concretas. Es un gran misterio.

Comprobación empírica

¿Cómo se puede saber si lo predicho por las ecuaciones anteriormente derivadas refleja el comportamiento real de un gusano? Buscando la forma o de confirmar o de falsificar sus predicciones por medio de experimentos. Nuestras ecuaciones nos surten tres predicciones:

1. Según Ecuación (4), $L_s = L_{tr} + \left(\frac{Mg}{2E}\right)L_{tr}^2$. Entonces, una gráfica que contraste $L_s - L_{tr}$ con L_{tr}^2 debería tener la forma de una línea recta.

2. Según Ecuación (27), $T = 4L_{tr}\sqrt{\frac{M}{E}}$. Entonces, una gráfica contrastando T con L_{tr} debería tener la forma de una línea recta.

3. Si las gráficas arriba mencionadas tienen la forma de líneas rectas en verdad, debería poder calcularse la aceleración gravitatoria g a partir de los pendientes. Precisamente, la pendiente de la gráfica contrastando $L_s - L_{tr}$ con L_{tr}^2 debe ser $Mg/2E$, y la de la gráfica contrastando T con L_{tr} debe ser $4(M/E)^{½}$. De modo que si con α representamos a $Mg/2E$, y con θ representamos a $4(M/E)^{½}$, entonces $32\alpha/\theta^2$ debe igualar a g (980 cm/seg^2).

Hagamos estas pruebas con datos (Tabla 2) provenientes de experimentos realizados por algunos niños a quienes enseñamos. A partir de estos datos, se construyen las gráficas de las Figuras 5 y 6. Se ve que las dos gráficas sí tienen la forma de líneas rectas.

El cálculo de g se encuentra en Tabla 3. El valor de g calculado a partir de los datos para el gusano metálico discrepa del verdadero en un 2.24%, y el calculado a partir de los datos para el plástico discrepa del verdadero en un 5.21%.

Para resultados calculados a partir de un modelo simple, con base en datos provenientes de experimentos hechos por niños con juguetes infantiles, ¡no son tan inexactos estos valores de g!

Tabla 2. Datos de los experimentos con los gusanos.

L_{tr}	L_s (cm)	Segundos para 20 vibraciones
Datos del gusano metálico		
1	6.2	10.62
		9.63
		10.5
2	25.6	18.03
		18.03
		18.04
3	55.2	26.28
		26.78
		26.81
4	101	35.53
		35.56
		35.62
Datos del gusano plástico		
1	3.8	5.56
		5.41
		5.97
2	11.8	11.06
		11.07
		11.03
3	22.7	15.56
		15.5
		15.44
4	38.3	20.37
		20.32
		20.38

Figura 5. Ls-Ltr vs Ltr^2 para gusanos de plástico y de metal.

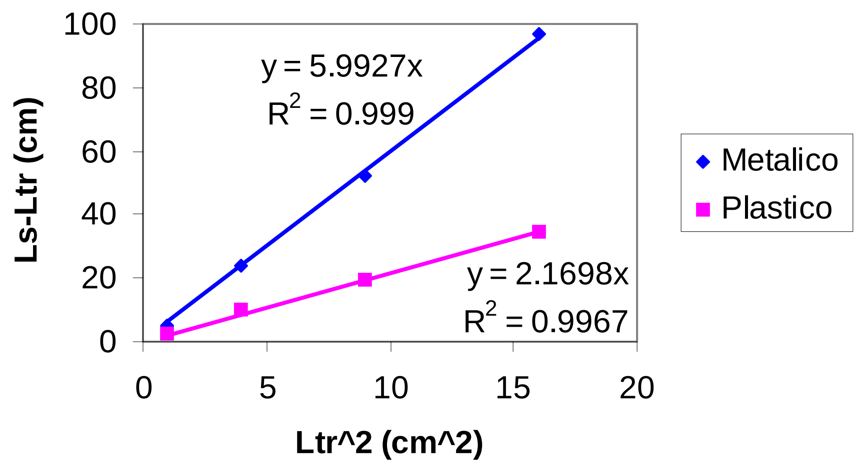


Figura 6. T vs Ltr para gusanos de plástico y de metal.

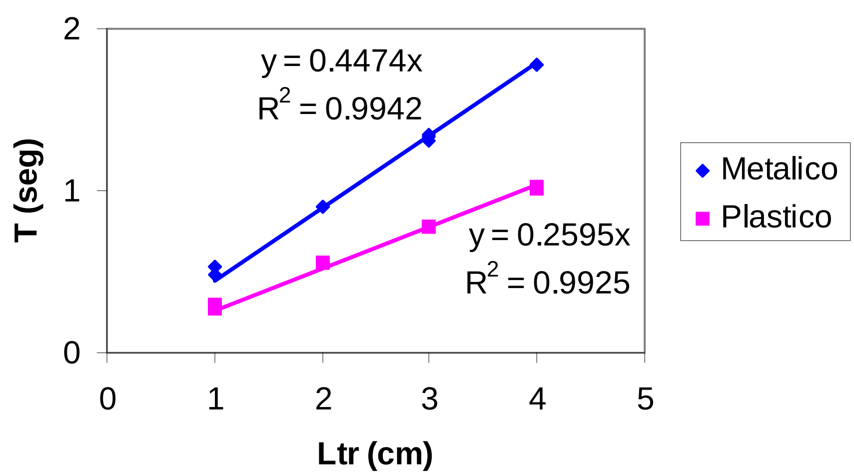


Tabla 3. El cálculo de *g* a partir de los pendientes de las Figuras 5 y 6.

Cantidad	Valor para el gusano metálico	Valor para el gusano de plástico
α (cm^{-1})	5.9927	2.1698
θ (seg/cm)	0.4474	0.2595
$g = 32\alpha/\theta^2$ (cm/seg^2)	958	1030
% error	-2.24	+5.21