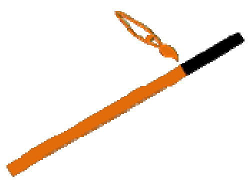
Apéndice

¿Cómo se miden o calculan longitudes, áreas, y volúmenes?

Sin duda, sabes que a veces es bueno poder comunicar "el tamaño" de una cosa. Pero las cosas tienen varios tipos de "tamaños".

Por ejemplo, una barra tiene una longitud:

Si tuviéramos que pintarla, nos daríamos cuenta que tiene cierta extensión de superficie:



Por fin, se nota que la barra ocupa cierto espacio. Es decir, tiene cierto volumen.

Bueno. Entonces ¿cómo podemos comunicar estos "tamaños"? Por lo general, por ponerlos números. Lo has hecho muchas veces, supongo. Por ejemplo, has escuchado que alguna cosa "mide 20 centímetros". En esta lección, aprenderemos más sobre el uso de números para comunicar los diferentes tamaños.

Resumen

- El concepto clave: Se define una medida "estándar" para el tipo de "tamaño" que nos interesa.

- ¿Cómo se ponen números a longitudes (distancias)?
  - Longitudes “fraccionarias”
  - Longitudes de líneas que no son rectas.
- ¿Cómo se mide la extensión de superficie (el área)?
  - La fórmula para calcular el área de un rectángulo a partir de las medidas de sus lados.
  - Un cambio de óptica
  - Las áreas de rectángulos cuyos lados tienen longitudes no enteros.
  - Áreas de superficies que no son rectangulares.
- ¿Cómo se mide el volumen de un objeto?
  - La fórmula para calcular el volumen de un cuerpo rectangular a partir de las medidas de sus lados.
  - El volumen de un cuerpo rectangular cuyos lados tienen longitudes “fraccionarias”.

El concepto clave: Se define una medida “estándar” para la característica que nos interesa

No dejes que esta idea te dificulte. De seguro has dicho alguna vez, algo por el estilo de, “Esta cosa mide 5 centímetros.” El “centímetro” es una longitud estandar. Otras longitudes estandares comunes son el milimetro, y el kilómetro. Entonces, al decir que la cosa mide 5 centímetros, comunicaste su longitud por decir que es cinco veces la longitud estandar que se llama “el centímetro”.

¿Cómo se ponen números a longitudes (distancias)?

Aquí tenemos un segmento. Su longitud, claro, es la distancia entre sus extremos. Queremos expresar su longitud por medio de algún número.

Primero, se escoge como el estándar, algún segmento que tenga una longitud conveniente. Dicho segmento se usará como un “metro”. Por ejemplo, este segmento azul:

El “segmento metro” estándar azul que escogimos es, en verdad, bien conocido. Es un centímetro:

1 cm

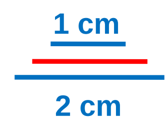
Ahora, se unen varias de las “azules” a lo largo de nuestro segmento original, y se nota que el segmento original es tan largo como tres “azules” juntos. Si queremos, podemos decir que “el segmento negro mide 3 azules”.

Por otro lado, podríamos escoger algún otro segmento conveniente como nuestro metro. Por ejemplo, este rojo:

Ajustando segmentos rojos a lo largo del segmento negro inicial, encontraríamos que “el negro mide 2 rojos”:

Aquí tenemos otro “segmento metro” bien conocido:

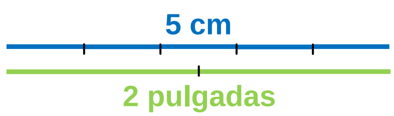
A diferencia del “centímetro” y la “pulgada”, nuestro “segmento metro” rojo no tiene nombre. De hecho, mide más de 1 cm, pero menos de 2.



Trataremos otros casos tales en seguida.

Una pregunta que ocurre a muchos alumnos es, “Entonces, ¿cuál es la verdadera longitud del segmento negro: 2, o 3?” La respuesta es, “No se puede decir solamente que la longitud “es 2”, o que “es 3”. Es necesario decir cuál metro usamos. Por ejemplo, tenemos que decir ‘2 rojos’, o ‘3 azules’.” Y, en verdad “2 rojos” es la misma longitud como “3 azules”:

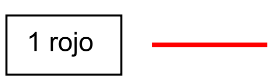
A la mejor, hayas visto una situación parecida al usar centímetros y pulgadas para medir una misma cosa. Por ejemplo, la longitud “5 cm” es casi exactamente igual a la longitud “2 pulgadas”:



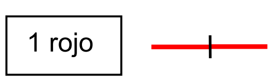
Longitudes “fraccionarias”

A esas alturas, sabemos cómo comunicar longitudes por medio de números: se elige algún “segmento estándar” conveniente, etc. Pero solo hemos examinado casos donde la longitud fue igual a la longitud de un número **entero** de “segmentos estándares”. Obviamente, por lo general las longitudes que nos tocan medir, no son así.

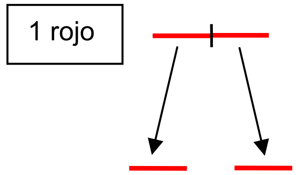
Entonces, ¿qué podemos hacer en un caso tal? Examinemos un caso simple, donde el segmento estándar rojo



está dividido en dos partes iguales.



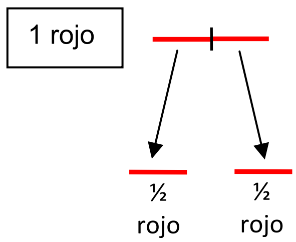
Ahora, separemos las dos partes.



¿Existe algún número que pudiéramos ponerle a la longitud de cada parte?

Es razonable pensar que cada parte es la mitad del segmento rojo,

por lo que el número que expresa la longitud de cada parte sería “½”. O sea, que la longitud de cada parte es “½ rojo”:

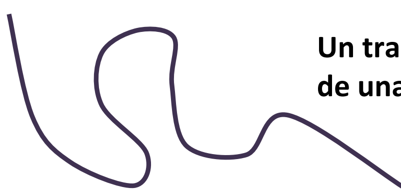


Y resulta que sí, esta idea funciona: podemos poner números fraccionarios (o decimales) a longitudes que no son iguales a números enteros, de nuestro metro (o sea, segmento estándar). (Por supuesto que un solo ejemplo no es suficiente para demonstrar la certeza de esta idea.)

Longitudes de líneas que no son rectas

Hasta este momento, hemos tratado las longitudes de segmentos rectos, exclusivamente. Pero por lo general, la cosa cuya longitud nos toca encontrar no es así. Aquí tenemos dos ejemplos:

El contorno de un terreno rectangular



Un tramo sinuoso de una carretera

En el caso del contorno del terreno, es razonable pensar que su longitud es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Y en verdad, así es. Hay, cuando menos, dos maneras de llegar a esta conclusión.

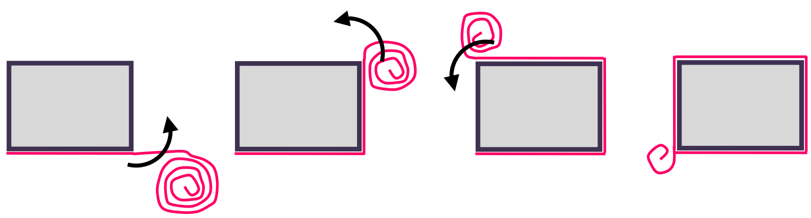
La primera es de idear el terreno como un rectángulo, el cual lo “desarticularemos”. De esta forma, se obtienen los cuatro segmentos que lo componen,

los cuales los unimos un solo segmento,

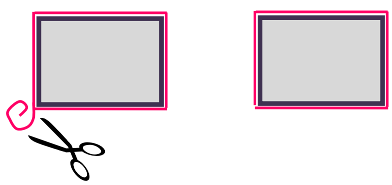
que se pueda medir como cualquier otro.

Ésta no es una demostración completa de por qué la longitud del contorno es igual a la suma de las longitudes de los lados. Pero, creo que es suficiente por ahora.

Una segunda manera es de imaginar que se ajusta una cuerda (la rosada) al contorno del terreno:



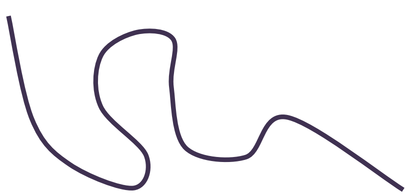
Se ve que la porción en contacto con el terreno tiene la misma longitud como el contorno. Entonces, podríamos cortarle a la cuerda su porción sobrante,



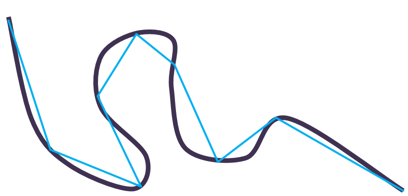
y enderezar la parte en contacto con el contorno, para medirla.

Esta segunda idea es altamente práctica cuando tenemos que medir la longitud de una curva: se la ajusta una cuerda, para después medir la cuerda. Pero con frecuencia podemos usar la primera idea también. O sea, la idea de trata la curva como un montaje de segmentos rectos.

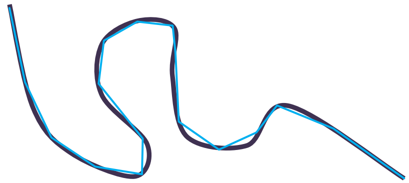
Me explico. Consideremos esta curva:



Podemos aproximarla como una serie de segmentos rectos:



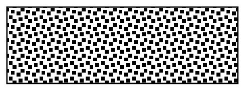
Mientras más segmentos usamos, mayor será la precisión de nuestra aproximación:



Ésta es la idea que se emplea en el cálculo para encontrar la longitud de una curva. Los detalles resultan, con frecuencia, un poco complicados, pero la estrategia misma es así de simple.

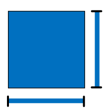
¿Cómo se mide la extensión de superficie (el área)?

Aquí tenemos un rectángulo que tiene (o ocupa) cierta extensión de superficie. O sea, que tiene cierta **área**.



¿Cómo podemos ponerle un número a esta área? La manera usual es la siguiente.

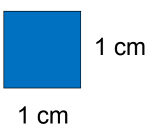
Primero, se define un área estándar. De costumbre, se usa algún cuadrado. Hay mucho provecho en usar un cuadrado cuyos lados sean iguales a la longitud de algún "segmento metro" estándar. Por ejemplo, el siguiente cuadrado tiene lados iguales a nuestro segmento azul:



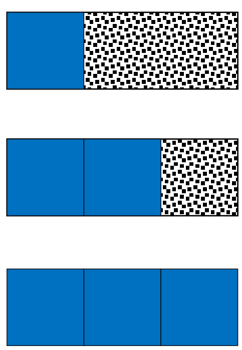
Esta área se define como 1 "azul cuadrado"

Ya que los lados de nuestro cuadrado estándar miden 1 cm, esta extensión de área se llama "1 centímetro cuadrado". Esto se puede abreviar como "**1 cm^2**".

Esta área = 1 cm^2



Una vez elegido el "cuadrado estándar", se ajustan varios de estos a la figura que nos interesa, hasta cubrirla completamente:



De esta forma, se encuentra que

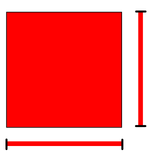
La extensión de área de esta figura es igual a 3 "azules cuadrados".

Pero esta información se comunica, por lo general, en la forma

El área de esta figura es 3 "azules cuadrados".

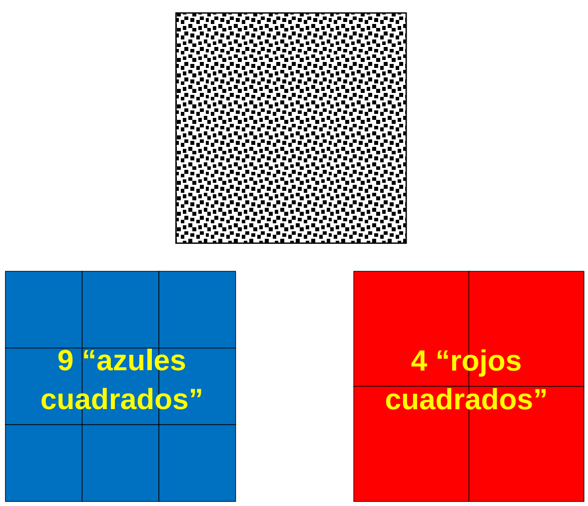
Ya que nuestra "azul cuadrado" es en verdad "**1 cm^2**", podemos decir que el área es de "3cm^2".

Por supuesto, podríamos escoger como nuestro "estándar", cualquier otra extensión de superficie. Por ejemplo, un cuadrado cuyos lados son iguales a nuestra "segmento rojo estándar":

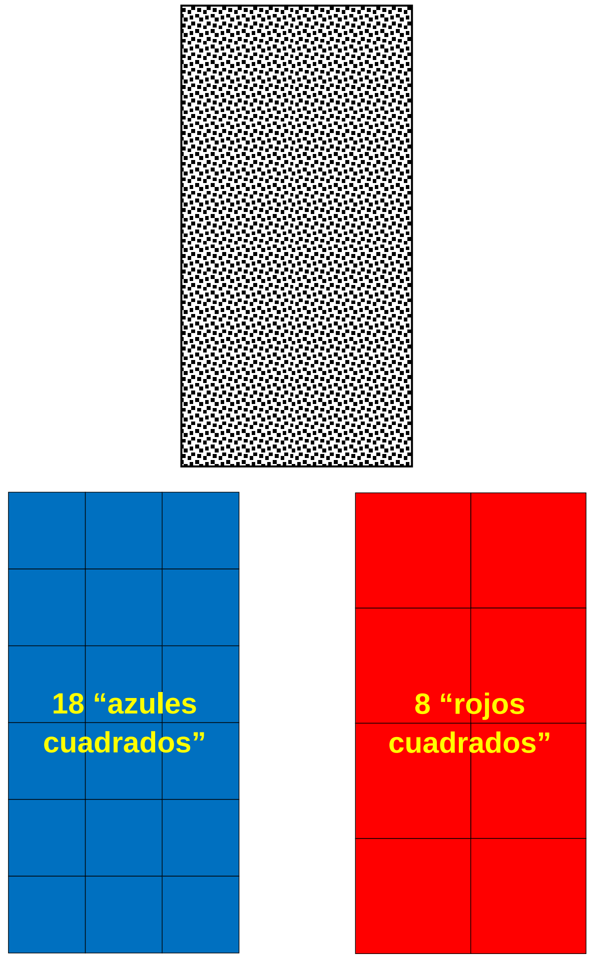


Esta área
= 1 "rojo cuadrado"

A continuación, se presentan dos casos donde se comunica la extensión de superficie de una misma figura, usando dos cuadrados "estándares".

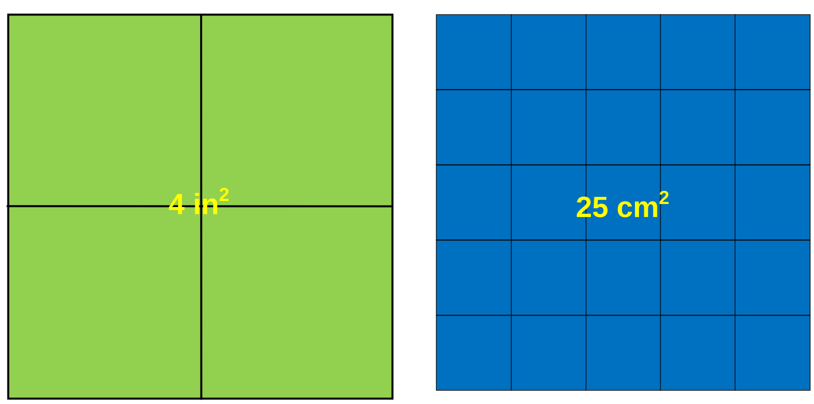


El segundo caso:



En inglés, la palabra para “pulgada” es “inch”, la cual se abrevia “in”. Entonces. “1 pulgada cuadrada” se abrevia “1 in^2”.

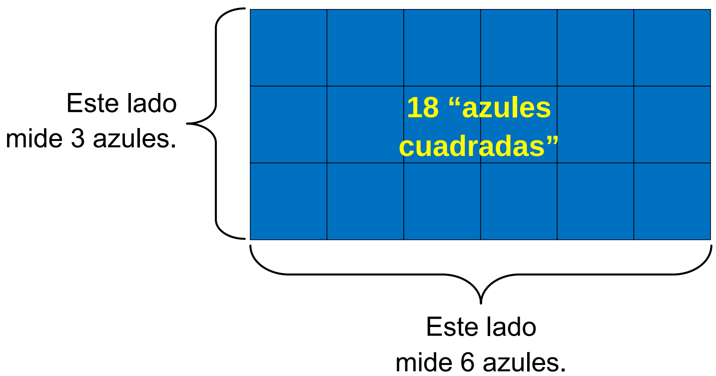
Una situación parecida ocurre cuando se usan centímetros cuadrados (cm^2) y pulgadas cuadradas (in^2). Resulta que 25 cm^2 son casi iguales a 4 in^2:



La fórmula para calcular el área de un rectángulo a partir de las medidas de sus lados

Acabamos de aprender que se puede poner un número a la extensión de superficie de una figura, por ajustarle tantos cuadrados estándares cuántos le quepan. Pero esta técnica casi siempre resulta molesta.

Lo que nos convendría más, es alguna fórmula que nos permita calcular el área de una figura a partir de las medidas de sus lados. Pero, ¿existe una fórmula tal? Empecemos con el rectángulo que examinamos hace poco.



Examinándolo de nuevo, notamos que el número de filas de cuadrados es igual a la longitud de su lado vertical (o sea, 3 azules). En cada fila, el número de cuadrados es igual a la longitud del lado horizontal del rectángulo (a saber, 6 azules). Con base en estas observaciones, podemos escribir un "borrador" de una fórmula:

$$\begin{aligned} El\ número\ de\ cuadrados \;&=\; El\ número\ de\ filas, multiplicado\ por \\ &\quad\ el\ número\ de\ cuadrados\ en\ cada\ fila. \end{aligned}$$

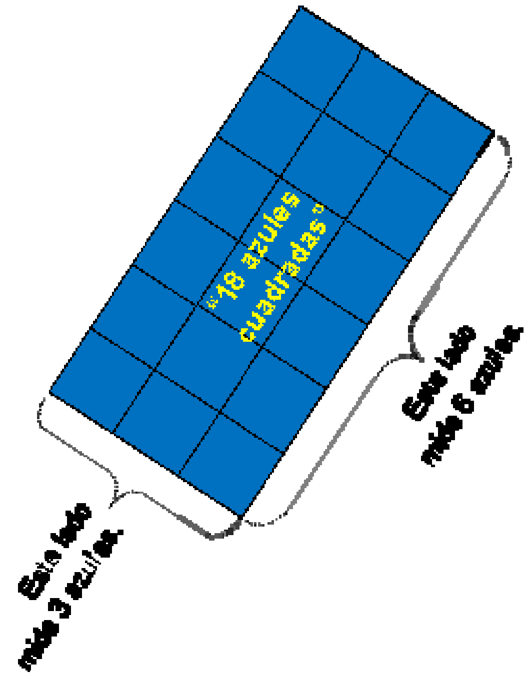
Ya que "el número de cuadrados" es el área, y "el número de filas" es la medida del lado vertical, etc., podemos "redactar" nuestro borrador:

$$El\ área = El\ producto\ de\ las\ medidas\ de\ los\ lados.$$

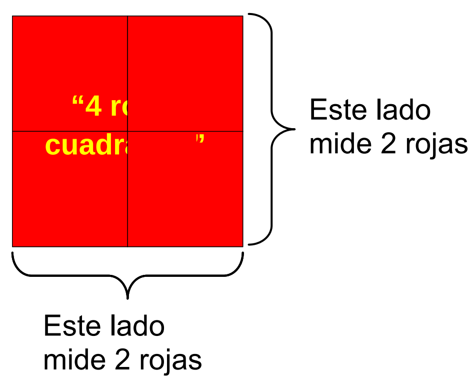
Concretamente,

$$18\ "azules\ cuadradas" \ = 6\ azules\ \times\ 3\ azules.$$

Nótese que esta fórmula funciona siempre, sin importar la orientación del rectángulo.

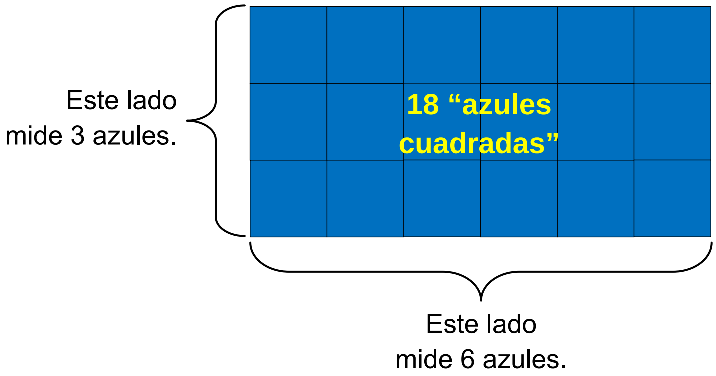


La misma fórmula funciona también para calcular el área de un cuadrado, porque un cuadrado no es sino un rectángulo cuyos lados son iguales:



Un cambio de óptica

Consideremos de nuevo, el rectángulo que acabamos de analizar:

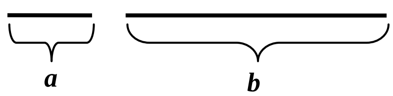


Lo cubren 18 cuadrados cuyos lados miden "1 azul". Por eso decimos que su área es de "18 azules cuadrados".

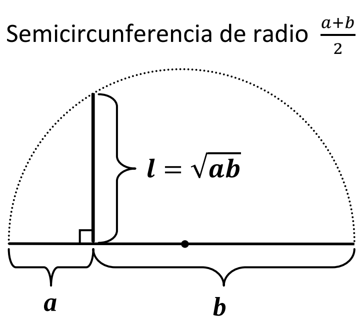
Ante una observación tal, fácilmente podríamos preguntar, "¿Existe un cuadrado que tiene la misma área? Si existe, ¿Cuánto miden sus lados?"

Los matemáticos griegos de la antigüedad investigaron sobre este tema. Encontraron que sí, existe. Es más, identificaron una construcción geométrica para encontrar la medida de sus lados.

Resulta que para cualesquier dos segmentos, digamos de longitudes ***a*** y ***b***,



podemos usar la siguiente construcción para obtener un segmento cuya longitud es igual a la raíz cuadrada del producto de las dos longitudes. O sea, un segmento que mide $\sqrt{ab}$:



Por la definición de la raíz cuadrada,

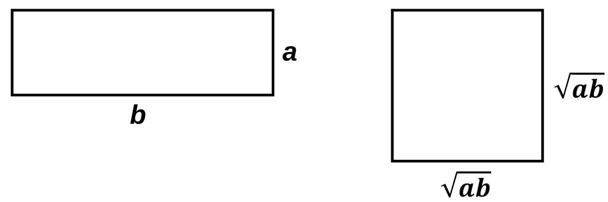
$$\sqrt{ab} \times \sqrt{ab} = ab \ .$$

Por eso

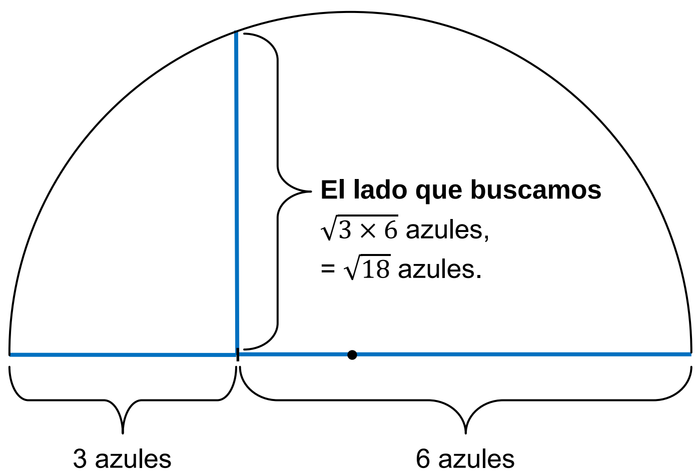
$$l \times l = ab \ .$$

Una de las interpretaciones geométricas de esta última es que un cuadrado cuyos lados miden $\sqrt{ab}$, tiene la misma área que un rectángulo cuyos lados miden ***a*** y ***b***:

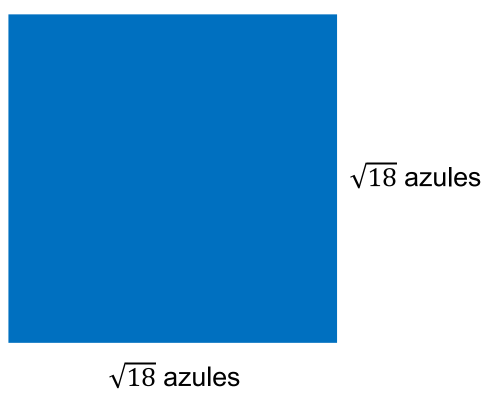
El rectángulo y el cuadrado tienen la misma área.



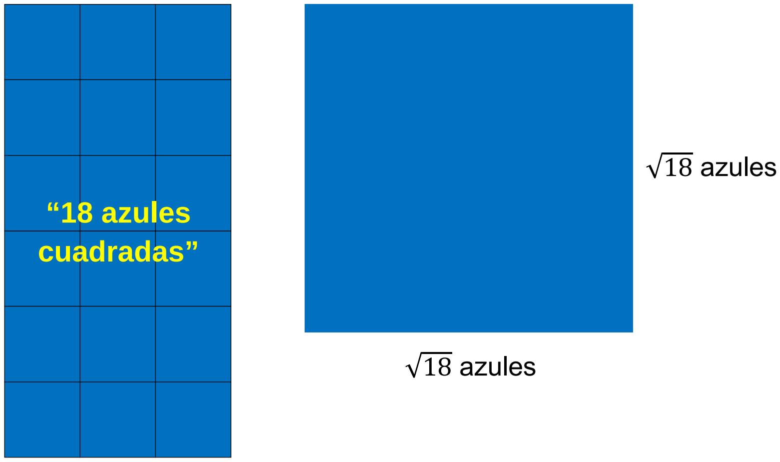
Ahora, apliquemos estas ideas a nuestro rectángulo. Primero, construimos un segmento que tenga el lado del cuadrado que buscamos:



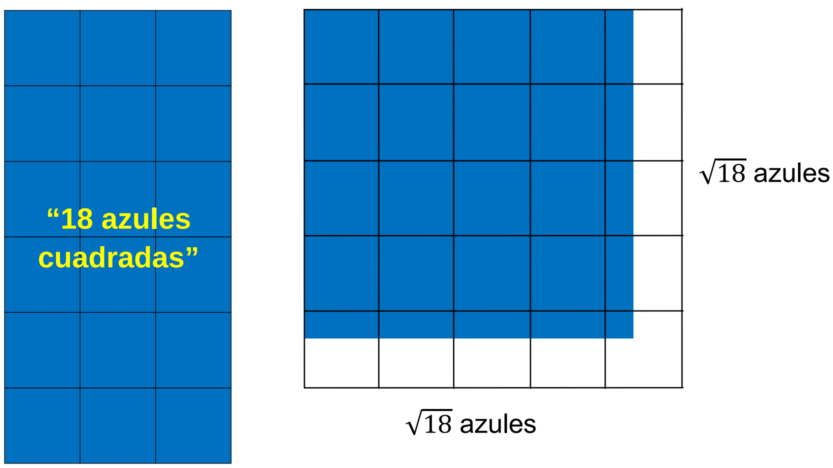
Segundo, construimos el cuadrado:



Ahora, comparemos el cuadrado con nuestro rectángulo.



Para facilitar nuestra investigación, coloquemos sobre el cuadrado, una rejilla con la distancia "1 azul" entre las líneas.



A partir de este diagrama, podemos hacer dos observaciones importantes.

- Aunque las dos figuras tienen la misma área (18 "azules cuadrados"), no caben en el cuadrado, los 18 cuadritos azules que caben en el rectángulo. Entonces, el hecho de que una figura tiene la misma área que tienen 18 "azules cuadrados" no implica, necesariamente, que 18 cuadrados tales le quepan.
- El lado del cuadrado que construimos no mide un número entero de "azules". En verdad, mide aproximadamente 4.24 azules.

Estas observaciones hacen útil, la siguiente política:

Diremos que el área de una figura es de ***A*** azules cuadrados si tiene la misma área como ***A*** cuadrados cuyos lados miden 1 azul. No es necesario que ***A*** cuadrados tales quepan en la figura.

Como una ampliación de esta política, diremos que la misma política aplica a cualquier otra unidad de medida. Por ejemplo, diremos que el área de una figura es de ***A*** cm^2 si tiene el mismo área como ***A*** cuadrados que miden 1 cm por 1 cm. No es necesario que ***A*** cuadrados tales quepan en la figura.

La segunda de nuestras observaciones nos impulsa a examinar casos en las que las figuras tienen lados que no miden un número entero de nuestra unidad de medida. Lo haremos a continuación.

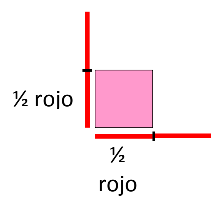
En la sección anterior, el cuadrado que construimos tuvo lados que midieron $\sqrt{18}$ "azules". Este número no es una fracción. En cambio, es del tipo que se llama "irracional". Sin embargo, los resultados que obtendremos en esta sección todavía aplican.

Las áreas de rectángulos cuyos lados tienen longitudes "fraccionarias"

De lo que hemos hecho hasta este momento surge una duda: si un rectángulo tiene lados cuyas longitudes son números fraccionarios, ¿se verifica todavía, la fórmula

$$El\ área = El\ producto\ de\ las\ medidas\ de\ los\ lados.\ ?$$

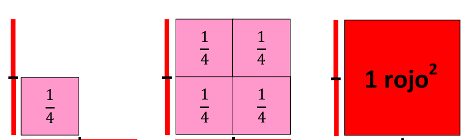
Resulta que sí, se verifica. Por ejemplo, en el siguiente diagrama, cada lado del cuadrado rosado mide ½ rojo.



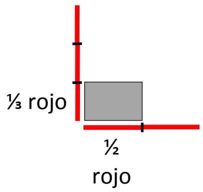
Según la fórmula,

$$El\ área = El\ producto\ de\ las\ medidas\ de\ los\ lados.$$
$$= \frac{1}{2} rojo \times \frac{1}{2} rojo$$
$$= \tfrac{1}{4} rojo^2 .$$

O sea, el área del cuadrado rosado es un cuatro del área que tiene un "rojo cuadrado". Para expresarlo de otra forma, el área de nuestro cuadrado estándar rojo es igual al área de cuatro de los cuadrados rosados juntos:



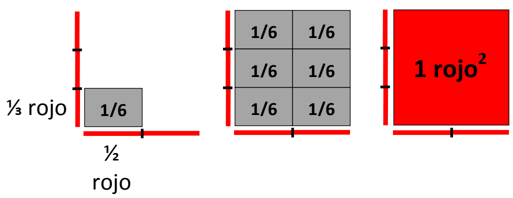
De la misma forma, los lados del cuadrado gris (abajo) miden ⅓ rojo y ½ rojo,



por lo que

$$\begin{aligned} El\ área &= El\ producto\ de\ las\ medidas\ de\ los\ lados \\ &= \frac{1}{3} rojo \times \frac{1}{2} rojo \\ &= \tfrac{1}{6} rojo^2 . \end{aligned}$$

O sea, el área de nuestro cuadrado estándar rojo es igual al área de seis de los cuadrados grises:



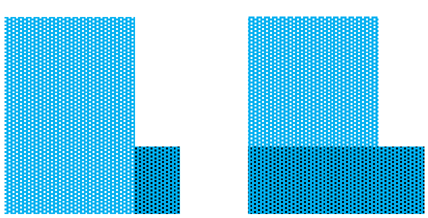
Repito que este tipo de “demostración” no es completa o rigurosa.

Áreas de superficies no rectangulares

A esas alturas, sabemos calcular áreas de rectángulos y cuadrados, inclusive aquellos cuyas medidas son fracciones. Pero nos interesan otras figuras también. Mencionamos aquí solamente las “figuras compuestas” y los triángulos.

A modo de una figura compuesta, presento la siguiente:

Ésta se puede idear como un montaje de rectángulos. Aquí tenemos dos posibilidades:



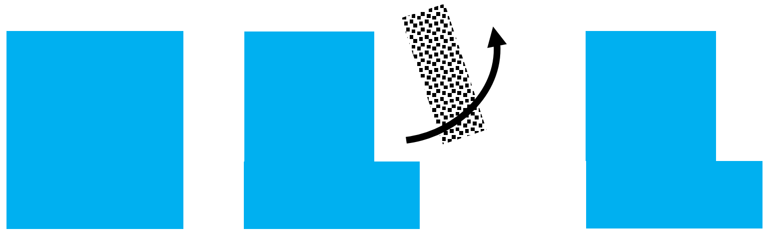
Bajo este concepto, el área de la figura es la suma de las áreas de los rectángulos que lo componen.

Este ejemplo es una primera aproximación a una técnica común en el cálculo: la de ver una figura como un montaje de rectángulos, la suma de cuyas áreas sería el área de la figura.

En verdad Arquímedes empleó la misma técnica hace más de 2000 años, para encontrar la fórmula para el área del círculo. Arquímedes tomó el círculo como un montaje de triángulos, en vez de rectángulos, pero las mismas ideas aplican.

Igualmente, nuestra figura es un rectángulo grande, del que se ha quitado un rectángulo menor:

También en casos como éste, el área azul se puede encontrar por restar al área del rectángulo, el área del vacío (blanco). A veces, será necesario encontrar un área así, por métodos aproximados.



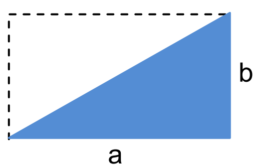
Bajo este concepto, para encontrar el área de nuestra figura, se resta el área del rectángulo menor.

Los dos conceptos que acabamos de conocer resultan útiles en muchos problemas. Por ejemplo, podemos usarlos, juntos con la fórmula para el área de un rectángulo, para desarrollar una para el área de un triángulo rectángulo.

Acuérdate que para un rectángulo,

$$El\ área = El\ producto\ de\ las\ medidas\ de\ los\ lados,$$
$$= a \times b\ .$$

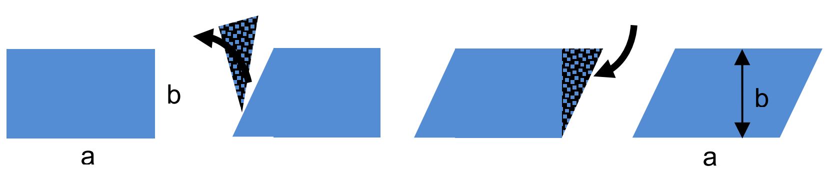
Todo triángulo rectángulo es la mitad de algún rectángulo,



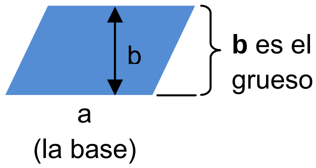
entonces podemos decir que

$$Área = La\ mitad\ del\ producto\ de\ los\ lados\ perpendiculares,$$
$$= \frac{a \times b}{2}\ .$$

A través de maniobras parecidas, podemos desarrollar una fórmula para el área de un paralelogramo. El triangulo rectángulo que se quita del lado izquierda del rectángulo inicial, se lo une de nuevo, pero en el lado derecho:



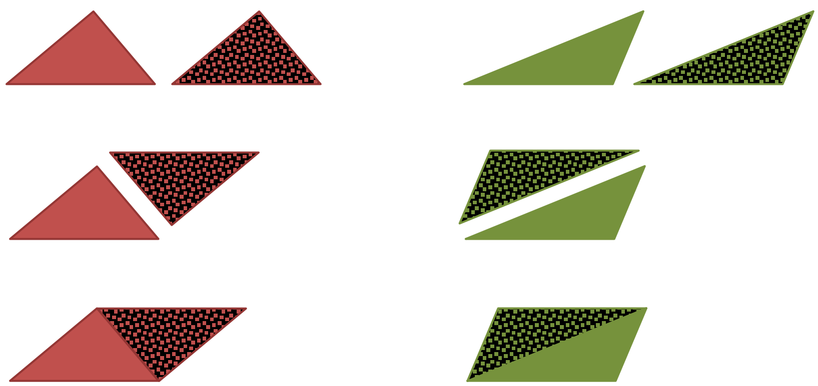
De esta forma, encontramos que el área de un paralelogramo es igual al área de un rectángulo con la misma base y el mismo grueso:



$$\acute{A}rea = Base\ por\ grueso$$

A partir de esta observación, podemos desarrollar otras fórmulas útiles. Por ejemplo, consideremos estos dos triángulos:

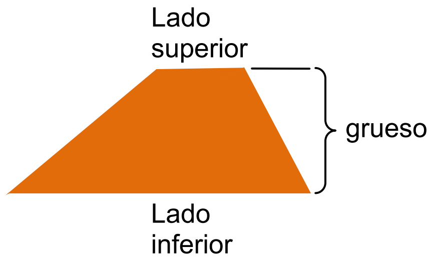
Partiendo de cada triángulo, se puede construir un paralelogramo. Nótate que primero, se duplica el triángulo inicial, para luego armar un paralelogramo:



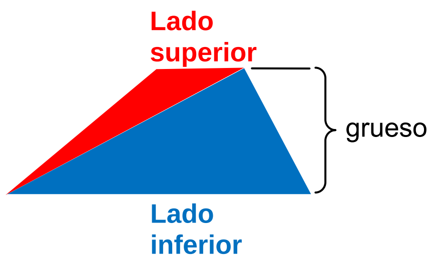
El área de cada paralelogramo es el doble del que tiene su respectivo triángulo inicial. O sea, el área del triángulo inicial es la mitad del que tiene su respectivo paralelogramo. La fórmula que acabamos de desarrollar para el área del paralelogramo nos dice que el área de un paralelogramo es el producto de su base y su “grueso”. Entonces,

$$\acute{A}rea = \frac{base \times grueso}{2}$$

Por fin, usaremos este último resultado para desarrollar una fórmula para el área del trapecio.



El trapecio lo dividimos en dos triángulos.



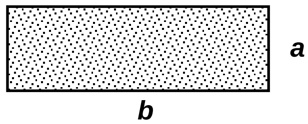
Separando éstos, se encuentran los elementos para calcular sus respectivas áreas.

Entonces,

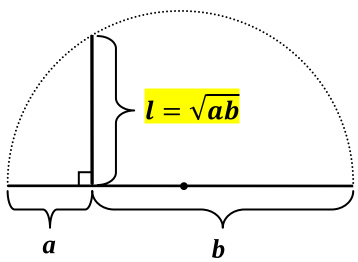
$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{(\textbf{Lado superior})\times grueso}{2} + \frac{(\textbf{Lado inferior})\times grueso}{2} \\ &= \frac{(\textbf{Lado superior}+\textbf{Lado inferior})\times grueso}{2}. \end{aligned}$$

Desarrollada la fórmula para el área de un triángulo, podemos, con provecho, volver a explorar la construcción geométrica que se usa para encontrar el cuadrado que tenga el mismo área que cualquier rectángulo dado:

Dado cualquier rectángulo,

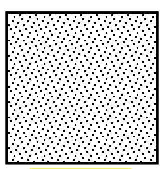


se realiza la siguiente construcción geométrica para obtener un segmento cuya longitud, $\boldsymbol{l}$,



(Semicircunferencia de radio $\frac{a+b}{2}$)

es el lado del cuadrado cuya área es igual al área del rectángulo.

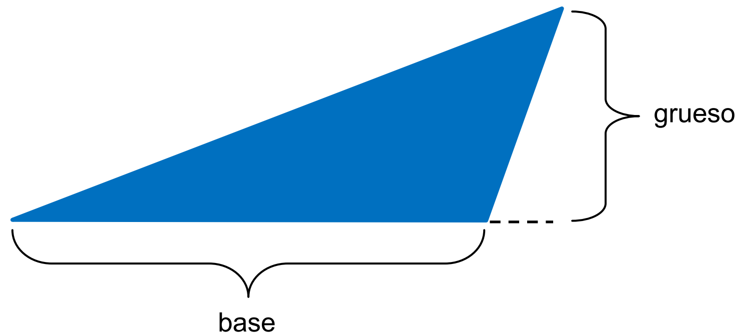


$\boldsymbol{l = \sqrt{ab}}$

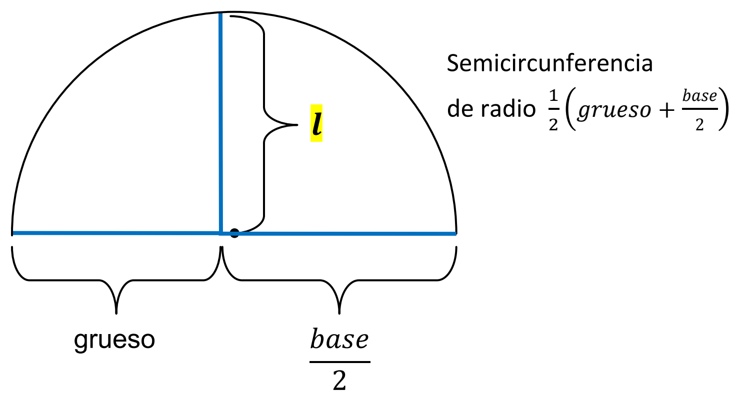
$\boldsymbol{l = \sqrt{ab}}$

En el caso de un triángulo, solo es necesario incluir, de una manera u otra, el factor ½. Por ejemplo,

Dado cualquier triángulo,

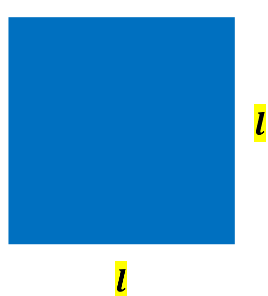


se realiza la siguiente construcción geométrica
para obtener un segmento cuya longitud, $\boldsymbol{l}$,

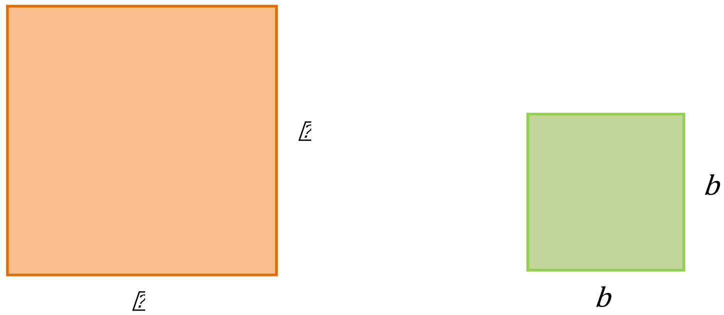


$$\boldsymbol{l} = \sqrt{\frac{base}{2} \times grueso} = \sqrt{\frac{base \times grueso}{2}}.$$

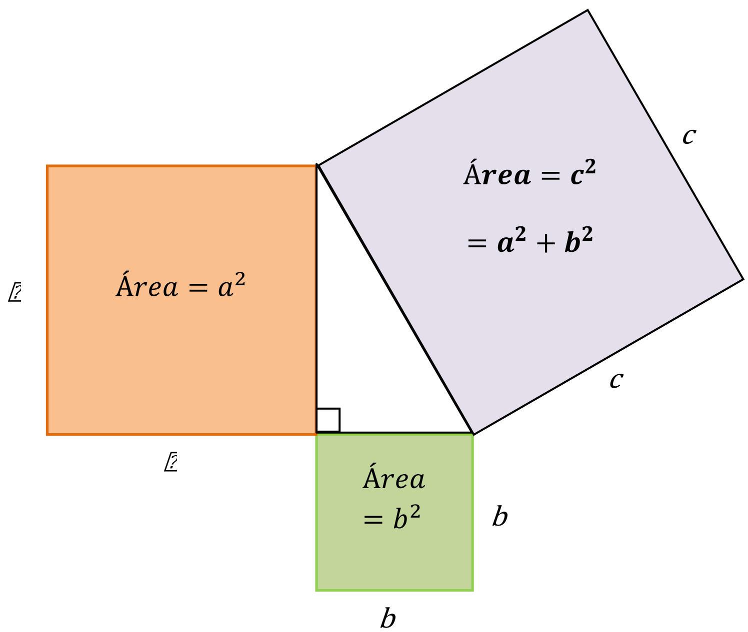
es el lado del cuadrado cuya área es igual
al área del triángulo.



Es más, dados cualesquier dos cuadrados,

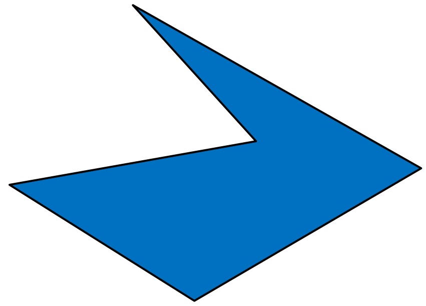


fácilmente podemos construir el cuadrado cuya área es la suma de las áreas de los dos:

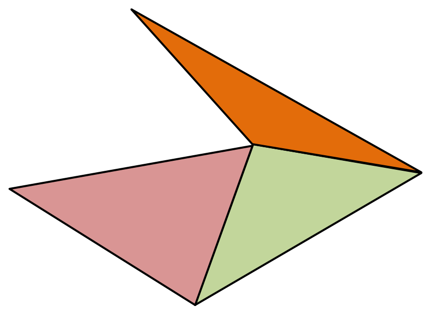


¿Reconoces esta construcción? Sí: es el significativo geométrico del famoso Teorema de Pitágoras: el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

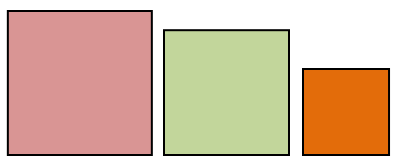
Gracias a esta última construcción, y aquella que usamos para construir el cuadrado que tiene la misma área que un triángulo dado, ya podemos construir el cuadrado cuya área es igual al área de cualquiera figura cuyos lados son segmentos rectos. Por ejemplo, la siguiente:



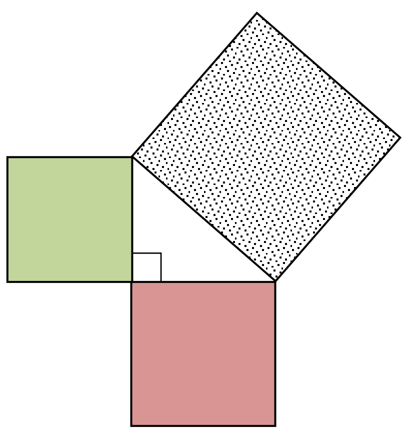
Primero, la dividimos en triángulos:



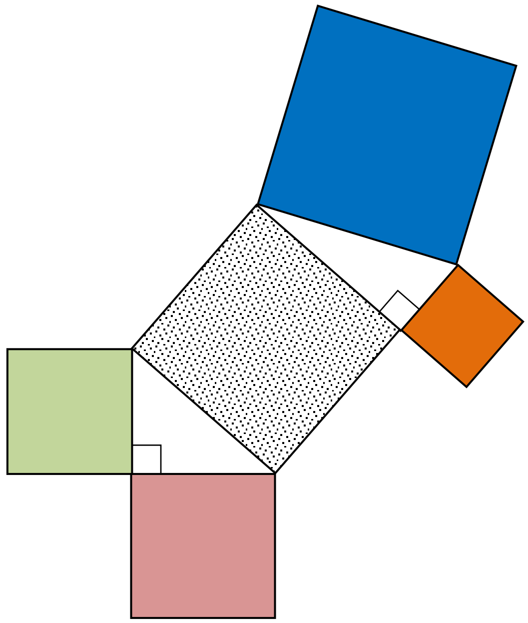
Para cada triángulo, se construye el cuadrado que tiene la misma área:



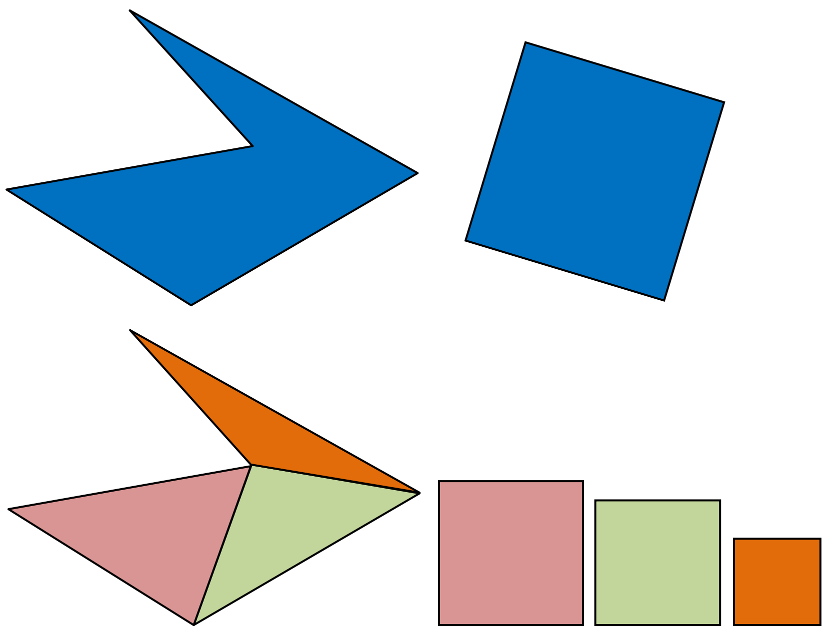
Mediante el Teorema de Pitágoras, se suman las áreas de dos de éstos:



Al resultado (o sea, el triángulo "gris"), se lo suma el área del tercer cuadrado:



El área del cuadrado azul es la suma de las áreas de los tres triángulos, y es igual al área de la figura original:



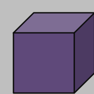
¿Cómo se mide el volumen de un objeto?

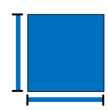
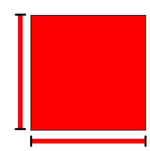
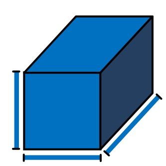
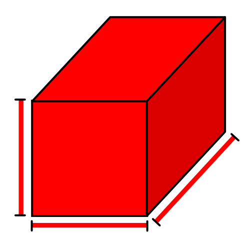
Cabe repetir que "medir" una característica de un objeto significa "ponerle un número" a la característica.

Para "medir" la longitud de un objeto, la comparamos con la longitud de **un segmento** estándar. Para medir el área de un objeto, la comparamos con el área de **un cuadrado** estándar. Es decir, un cuadrado cuyos lados tienen la misma longitud que el segmento estándar. Es razonable, entonces, “medir” el volumen de un objeto por compararlo al volumen de **un cubo** estándar. O sea, con el volumen de un cubo cuyas aristas tienen la misma longitud que el segmento estándar. A continuación, se presenta un resumen de este esquema:

“Estándares” para longitudes, áreas, y volúmenes según los sistemas “azul” y “rojo”

Aviso importante: En estos dibujos, los cubos parecen “distorsionados” porque todas sus aristas son verdaderamente iguales. En cambio, las tres aristas **no** son iguales en dibujos convencionales de cubos.

Por ejemplo, 

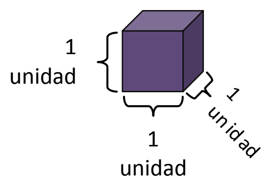
Característica	Unidad de medida	
	Sistema “azul”	Sistema “rojo”
Longitud	El “azul”	El “rojo”
Área (Extensión de superficie)	 El “azul cuadrado”	 El “rojo cuadrado”
Volumen	 El “azul cúbico”	 El “rojo cúbico”

Porque el “azul” es en verdad 1 cm, el área del “azul cuadrado” es de **“1 cm^2”**, y el volumen de “azul cúbico” es de podemos decir que el área es de **“1 cm^3”**. Este último es idéntico con “1 mililitro”.

No nos profundizaremos mucho en el cálculo de volúmenes, sino daremos unos cuantos ejemplos simples, y mencionaremos las ideas claves.

En la tabla arriba presentada, señalamos que parece “distorsionado”, un cubo dibujado con lados verdaderamente iguales. Este fenómeno complica el uso de dibujos en la enseñanza del cálculo de volúmenes. Para evitar una posible confusión que podría resultar si modificáramos los dibujos del "azul cúbico" y del "rojo cúbico", usaremos en lugar de éstos, un cubo estándar "genérico". Éste será dibujado al estilo convencional, con el entendido de que el uso de la perspectiva en este estilo ocasiona que los lados del cubo parezcan desiguales. Entonces, aquí tenemos el dibujo de nuestra "unidad cúbica" genérica:

Nuestra "unidad cúbica" genérica



Volumen = 1 unidad cúbica (**1 u³**)

La fórmula para calcular el volumen de un cuerpo rectangular a partir de las medidas de sus lados

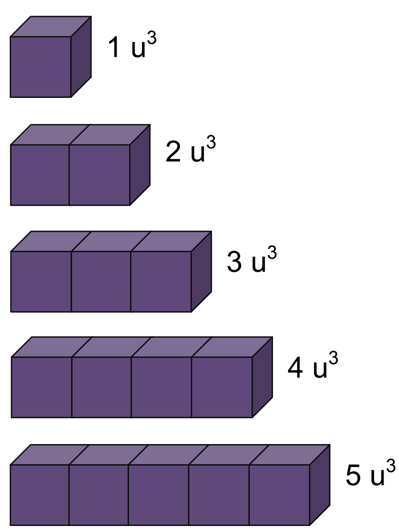
Aquí presentamos varios diagramas en apoyo a la fórmula

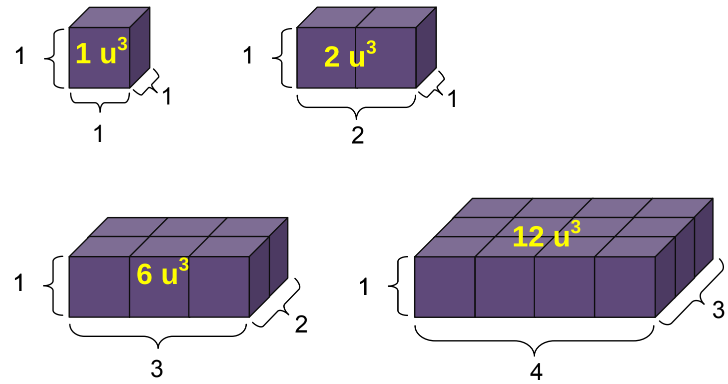
El volumen de un cuerpo rectangular es igual al producto de las medidas de sus lados.

Por supuesto, estos diagramas no son una demostración formal y rigorosa de la fórmula.

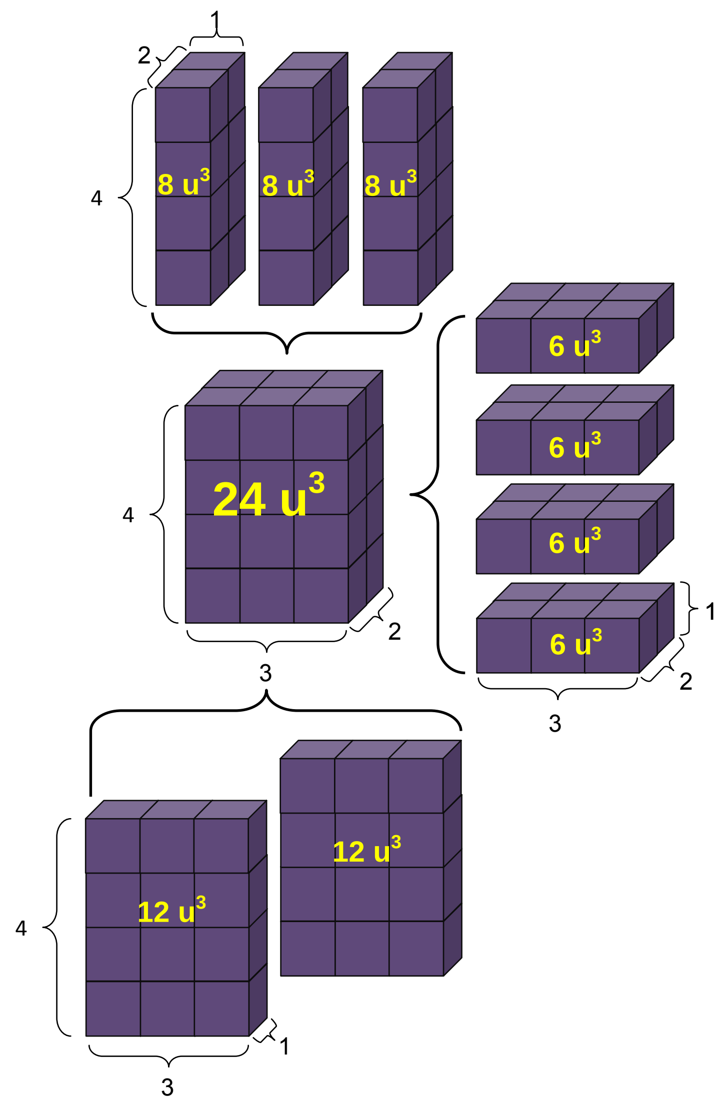
Cuando unimos dos objetos, el volumen del cuerpo resultante es la suma de los volúmenes de los objetos que unimos.

"u³" significa "unidad cúbica"





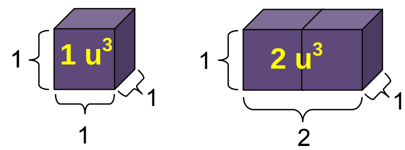
Abajo, mostramos diferentes cortes de un cuerpo rectangular cuyo volumen es 2×3×4 = 24 u^3.



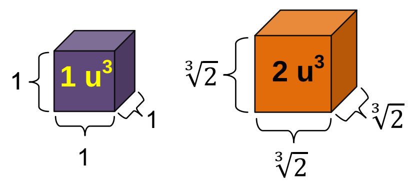
El volumen de un cuerpo rectangular cuyos lados tienen longitudes no enteros

¿Se verifica nuestra fórmula para el volumen de un cuerpo rectangular, cuando las longitudes de sus aristas no son números enteros? Sí, pero los dibujos necesarios para apoyar esta respuesta serían molestos. En cambio, trataremos un solo caso interesante.

Consideremos un cuerpo rectangular de volumen 2 u^3. O sea, uno cuyo volumen es el doble de nuestro cubo estándar:

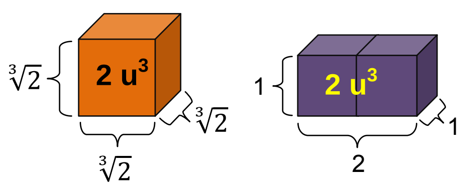


Razonablemente, podríamos preguntar cuál sería el lado de un cubo que tenga el mismo volumen (2 u^3). Resulta que el lado sería $\sqrt[3]{2}$:



Acuérdate que la $\sqrt{18}$ (la que conocimos al tratar el cuadrado de área 18), no es una fracción, sino un número “irracional”. La $\sqrt[3]{2}$, también, es un número irracional.

Lo creo obvio, que no caben dos cubos estándares en el cubo de volumen 2 u^3, a pesar de que éste tiene el mismo volumen que los dos “estándares”:



Así tal como fue el caso cuando tratamos las áreas, el asunto de los volúmenes de cuerpos cuyas dimensiones son fraccionarias (¡o peor!) nos motiva a adoptar cierta política al respecto:

> Diremos que el volumen de un cuerpo es de ***V*** unidades cúbicas (u^3) si tiene el mismo volumen como ***V*** cubos cuyos lados miden 1 unidad. No es necesario que ***V*** cubos tales le quepan al cuerpo.

Nuestra fórmula para el volumen de un cuerpo rectangular:

El volumen de un cuerpo rectangular es igual al producto de las medidas de sus lados.

Resumen

- **“Medir” una característica de un objeto significa “ponerle un número” a la característica.**
- **El concepto clave: Se define una medida “estándar” para la característica que nos interesa**
- **Una esquema común, para “ponerles números” a longitudes, áreas, y volúmenes:**
  - Comparar la longitud de un objeto con aquella la longitud de un segmento estándar.
  - Comparar el área de un objeto con aquella área de un cuadrado estándar, cuyos lados tienen la misma longitud que el segmento estándar.
  - Comparar el volumen de un objeto con aquello de un cubo estándar, cuyas aristas tienen la misma longitud que el segmento estándar.
- **Con decir que el área de una figura es de *A* unidades cuadradas, no decimos que en ella caben (necesariamente) *A* cuadrados cuyos lados miden 1 unidad. Decimos, en cambio, que la figura tiene la misma área como *A* cuadrados tales, juntos.**
- **Con decir que el volumen de un cuerpo es de *V* unidades cúbicas, no decimos que en ello caben (necesariamente) *V* cubos cuyas aristas miden 1 unidad. Decimos, en cambio, que el cuerpo tiene el mismo volumen como *V* cubos tales, juntos.**