El Desarrollo de la Fórmula $v_f^2 - v_o^2 = 2as$ a Partir de $v_f = v_o + at$ y $x_f - x_o = v_o t + \frac{1}{2}at^2$

En el movimiento rectilíneo, con una aceleración constante, hay dos verdades importantes que se desprenden de las definiciones de "la velocidad" y "la aceleración".

La primera verdad es

> *La velocidad que tiene un objeto al final de un intervalo de tiempo, es igual a la que tenía al comienzo del intervalo, más el producto de la aceleración con el tiempo trascurrido durante el intervalo.*

Esta verdad, "traducida" al idioma de las matemáticas, es

$$v_f = v_o + at. \tag{1}$$

$\boldsymbol{v_f}$ = La velocidad que tiene el objeto al final del intervalo de tiempo.

$\boldsymbol{v_o}$ = La velocidad que tenía el objeto al comienzo del intervalo.

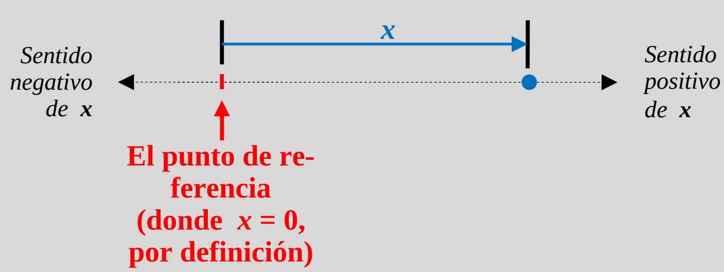
$\boldsymbol{a}$ = La aceleración.

$\boldsymbol{t}$ = El tiempo trascurrido. (Cuánto duró el intervalo).

Nótese:
Pueden ser positivos, negativos, o cero, los valores de $\boldsymbol{v_f}$, $\boldsymbol{v_o}$, y $\boldsymbol{a}$.

Para presentar la segunda verdad, tenemos que definir primero, la distancia x entre el objeto y el punto de referencia:

Cómo se define la distancia x.



La línea de puntos es la trayectoria rectilínea del objeto.

Ahora, la segunda verdad es

> *La distancia entre la posición que el objeto guarda al final del intervalo, y la guardaba al comienzo, es igual a la suma de las siguientes dos cantidades:*
>
> - *El producto de la velocidad con el tiempo trascurrido durante el intervalo; y*
> - *La mitad del producto de la aceleración, con la cuadrado del tiempo trascurrido.*

Traducida, esta verdad es

$$x_f - x_o = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2}$$

$\boldsymbol{x_f}$ = El valor de $\boldsymbol{x}$ al final del intervalo de tiempo.

$\boldsymbol{x_o}$ = El valor de $\boldsymbol{x}$ al comienzo del intervalo.

Nótese:
Pueden ser positivos, negativos, o cero, los valores de $\boldsymbol{x_f}$, y $\boldsymbol{x_o}$.

Es imprescindible notar que "$x_f - x_o$" no es necesariamente la distancia que el objeto recorrió durante el intervalo. Por ejemplo, cuando un objeto es lanzado directamente hacia arriba, y regresa al suelo, el objeto sí recorre cierta distancia, pero su x_f es igual a su x_o, por lo que $x_f - x_o = 0$.

El símbolo "≡" quiere decir "se define como".

Muchas veces, con fines de simplificar la forma "traducida" de la segunda verdad, se define un variable $\boldsymbol{s}$,

$$s \equiv x_f - x_o,$$

donde el símbolo "≡" quiere decir "se define como". Con esta simplificación, la segunda verdad se trasforma en

$$s = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

Desafortunadamente, esa versión simplificada suele ser malinterpretada, porque fácilmente se puede suponer que "$\boldsymbol{s}$" representa la distancia recorrida por el objeto.

Una tercera verdad importante

Ahora, a partir de las dos "traducciones" arriba presentadas, o sea, las ecuaciones

$$v_f = v_o + at. \tag{1}$$

y

$$x_f - x_o = v_o t + \tfrac{1}{2}at^2, \tag{2}$$

deduciremos una tercera verdad importante.

Primero, notemos que se puede despejar al "$\boldsymbol{t}$" en la primera ecuación, para obtener

$$t = \frac{v_f - v_o}{a}.$$

Esta ecuación puede entenderse de varias formas. La más obvia es

> *"El tiempo trascurrido es igual a la diferencia entre la velocidad que el objeto tiene al final del intervalo, y la que tenía al comienzo, dividida entre la aceleración."*

Hay veces cuando ésta es exactamente la forma que nos sirve más. Pero la misma verdad puede entenderse también, como

De hecho, cualquiera ecuación puede entenderse así. O sea, el símbolo "=" quiere decir que los dos lados de la ecuación representan uno y el mismo número.

> *"Son uno y el mismo número, el "$\boldsymbol{t}$", y el resultado del cálculo $\frac{\boldsymbol{v_f - v_o}}{\boldsymbol{a}}$.*

Esta observación nos resulta útil porque existe una propiedad de la igualdad que se llama "la propiedad sustitutiva de la igualdad": ya que $\frac{\boldsymbol{v_f - v_o}}{\boldsymbol{a}}$ y "$\boldsymbol{t}$" son iguales, se puede escribir $\frac{\boldsymbol{v_f - v_o}}{\boldsymbol{a}}$ en el lugar de "$\boldsymbol{t}$" en nuestra segunda ecuación:

$$x_f - x_o = v_o \boldsymbol{t} + \tfrac{1}{2}a\boldsymbol{t}^2$$

luego

$$x_f - x_o = v_o\left(\frac{\boldsymbol{v_f - v_o}}{\boldsymbol{a}}\right) + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{\boldsymbol{v_f - v_o}}{\boldsymbol{a}}\right)^2. \tag{3}$$

Ésta es una nueva verdad, que se desprende de las primeras dos.

Antes de que sigamos adelante, deberíamos reflexionar sobre esta nueva verdad, para saber si valdrá la pena trabajarla más. Por ejemplo, para simplificar la Ecuación (3). Una pregunta que se debería responder es, ¿Qué nos dice esta nueva verdad, que las primeras dos verdades **no** nos dijeron?

Respondamos esta pregunta por notar, primero, que cada una de las tres verdades (es decir, las primeras dos, más la nueva) nos cuenta una relación entre las cantidades (variables) que intervienen en el movimiento rectilínea. A saber,

"Verdad"		**Sus variables**
1. $v_f = v_o + at$		a, t, v_o, v_f
2. $x_f - x_o = v_o t + \frac{1}{2}at^2$		a, t, x_o, x_f
3. $x_f - x_o = v_o\left(\frac{v_f - v_o}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_f - v_o}{a}\right)^2$		a, x_o, x_f, v_o, v_f

Resulta que la nueva verdad trata una combinación de variables distinta a aquellas que figuran en las primeras dos. Concretamente, el tiempo (***t***) no figura en la tercera. Por lo tanto, puede que la tercera verdad nos permita resolver nuevos tipos de problemas.

Gracias a esta reflexión, ya estamos convencidos de que sí, valdrá la pena simplificar la Ecuación (3). Manos a la obra:

$$
\begin{aligned}
x_f - x_o &= v_o\left(\frac{v_f - v_o}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_f - v_o}{a}\right)^2 \\
&= \frac{v_f \cdot v_o - v_0^2}{a} + \frac{v_f^2 - 2v_f \cdot v_o + v_0^2}{2a} \\
&= \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a(x_f - x_o),$$

o también,

$$v_f^2 - v_0^2 = 2as,$$

con $s \equiv x_f - x_o$.

Pero enfatizo: ***s*** es la distancia entre la posición final y la inicial. No es, necesariamente, la distancia recorrida por el objeto.