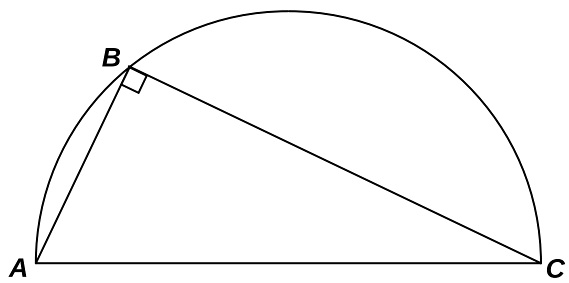
¿Por qué funcionan las construcciones para encontrar la raíz cuadrada?

Todas dependen de la presencia de triángulos semejantes en las construcciones.

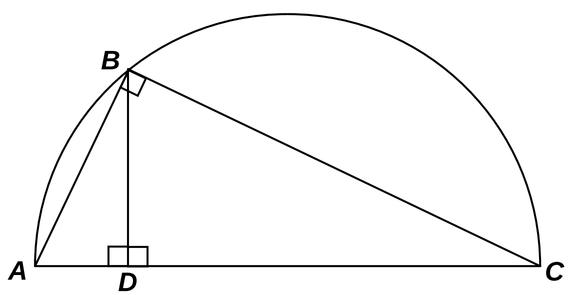
Las construcciones que tratan semicircunferencias

Para entender ésta, tenemos que saber que en el siguiente dibujo,

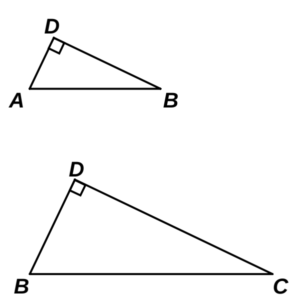


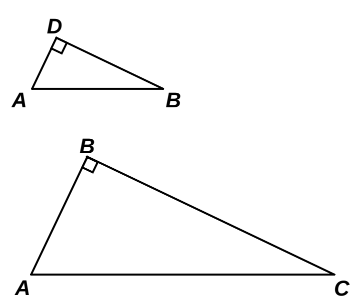
el ángulo $\angle \boldsymbol{ABC}$ es un ángulo recto. Eso porque *todo* ángulo inscrito en una semicircunferencia lo es.

Si dibujamos un segmento perpendicular al diámetro **AC**, y que pasa por el punto ***B***, resulta que el ángulo $\angle \boldsymbol{ADB}$ es recto también.



Por lo tanto, son semejantes los siguientes dos pares de triángulos:





Por consiguiente, examinando el primer par, se observa que

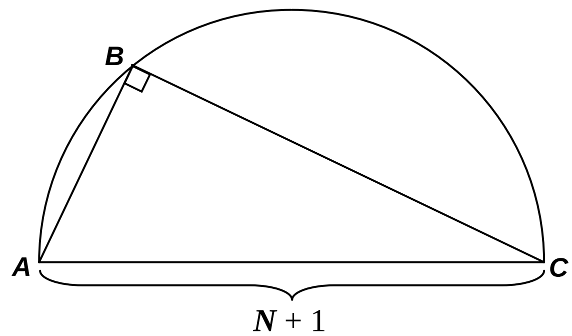
$$\boldsymbol{BD}/\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{AD}/\boldsymbol{BD}, \text{ luego } \boldsymbol{BD}^2 = \boldsymbol{AD}\times\boldsymbol{CD}, \text{ y } \boldsymbol{BD} = \sqrt{\boldsymbol{AD} \times \boldsymbol{CD}},$$

donde ***AD***, ***BD***, y ***CD*** representan las longitudes de los respectivos segmentos.

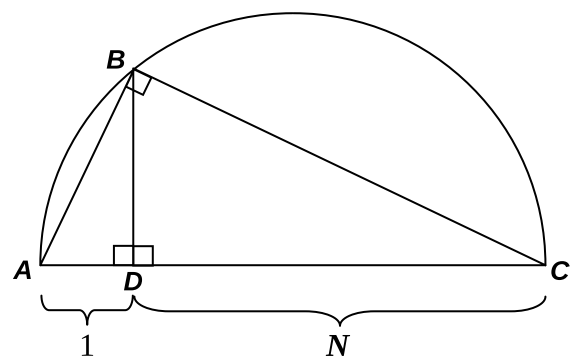
De manera parecida, un análisis de segundo par de triángulos nos lleva a que

$$\boldsymbol{AB}/\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD/AB}, \text{ luego } \boldsymbol{AB}^2 = \boldsymbol{AD}\times\boldsymbol{AC}, \text{ y } \boldsymbol{AB} = \sqrt{\boldsymbol{AD} \times \boldsymbol{AC}} \ .$$

Bueno, ¿cómo usar estos conocimientos para encontrar la raíz cuadrada de un número? Hay dos técnicas. Digamos que el número del que queremos encontrar su raíz cuadrada, es $\boldsymbol{N}$. En la primera técnica, se construye una circunferencia cuyo diámetro es igual a $\boldsymbol{N} + 1$:

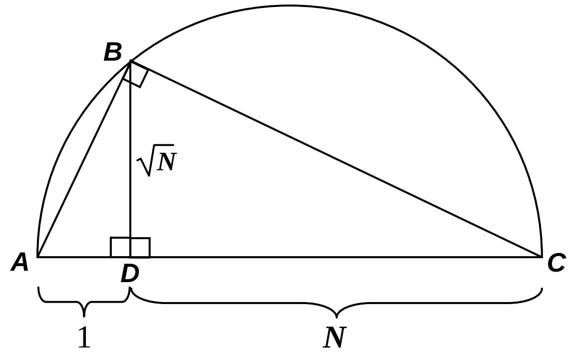


Después, se construye un segmento perpendicular al diámetro, a la distancia 1 de uno de sus extremos:

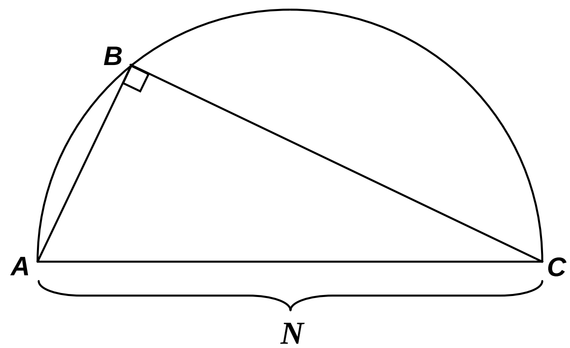


Ya que en esta construcción, $\boldsymbol{BD} = \sqrt{\boldsymbol{AD} \times \boldsymbol{DC}}$, resulta que $\boldsymbol{AB} = \sqrt{1 \times \boldsymbol{N}} = \sqrt{\boldsymbol{N}}$.

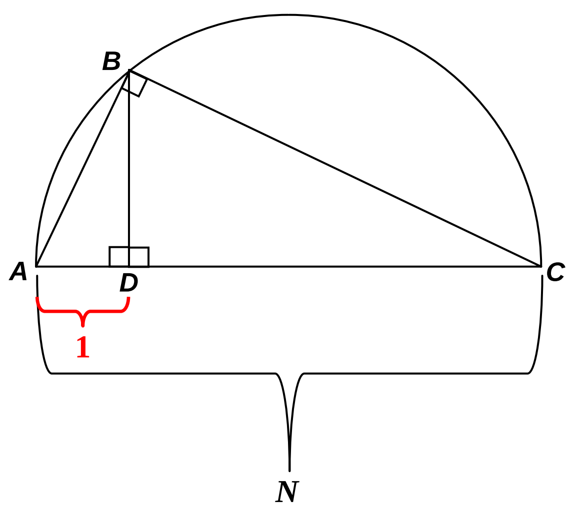
Por lo tanto, el resultado final es



En la segunda, técnica, se construye una circunferencia cuyo diámetro es igual a N mismo, en vez de $N + 1$:

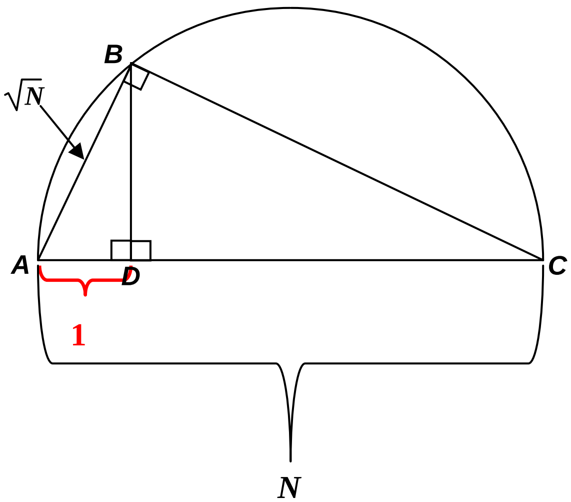


Después, exactamente como se hizo en la primera técnica, se construye un segmento perpendicular al diámetro, a la distancia 1 de uno de sus extremos:



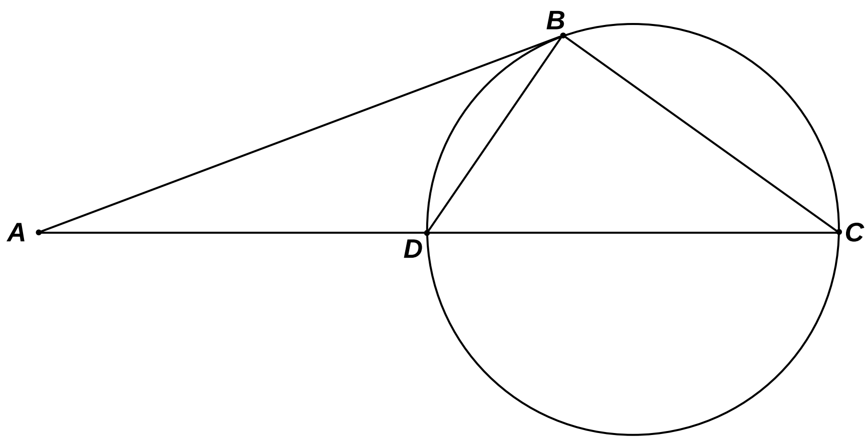
Ya que en esta construcción, $\boldsymbol{AB} = \sqrt{\boldsymbol{AD} \times \boldsymbol{AC}}$, resulta que $\boldsymbol{AB} = \sqrt{1 \times \boldsymbol{N}} = \sqrt{\boldsymbol{N}}$.

El resultado final es

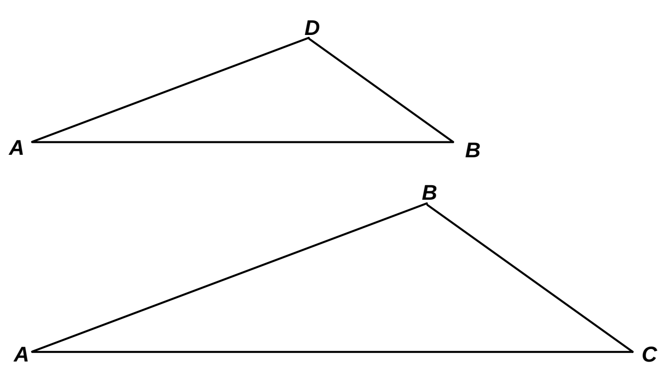


La construcción que trata una tangente a una circunferencia

En el dibujo que sigue, el segmento ***AB*** es tangente a la circunferencia, en el punto ***B***.



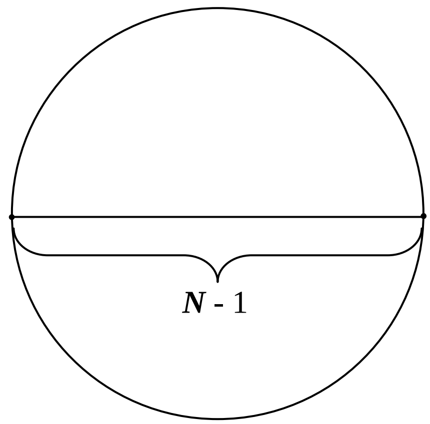
Son iguales los dos ángulos $\angle$***ABD*** y $\angle$***BCD***, por lo que los siguientes dos triángulos son semejantes:



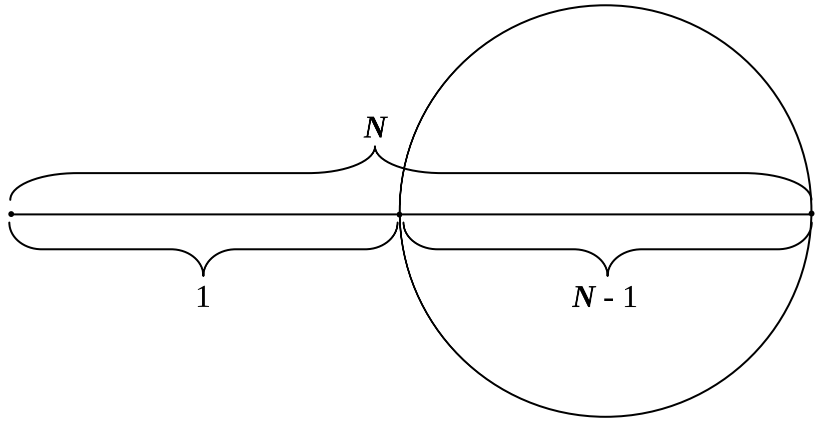
Por lo tanto,

$$\boldsymbol{AB}/\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD}/\boldsymbol{AB}, \text{ luego } \boldsymbol{AB}^2 = \boldsymbol{AC}\times\boldsymbol{AD}, \text{ y } \boldsymbol{AB} = \sqrt{\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}} \;,$$

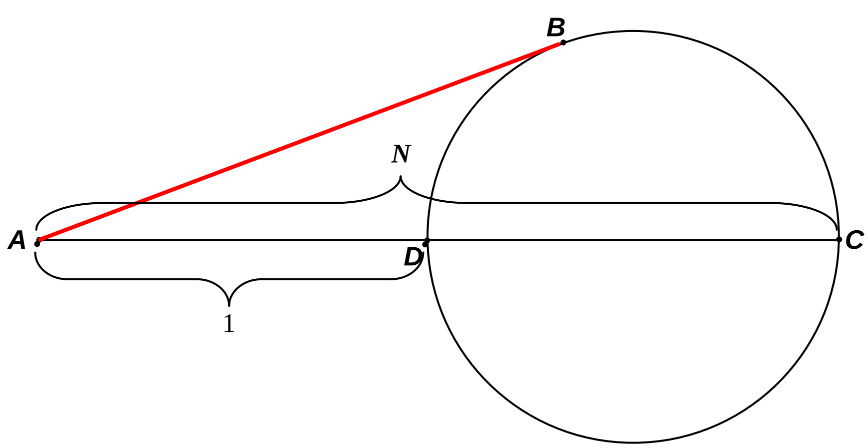
¿Cómo usar esta idea para encontrar la raíz cuadrada de algún número $\boldsymbol{N}$?
Primero, se construye una circunferencia de diámetro $\boldsymbol{N} - 1$:



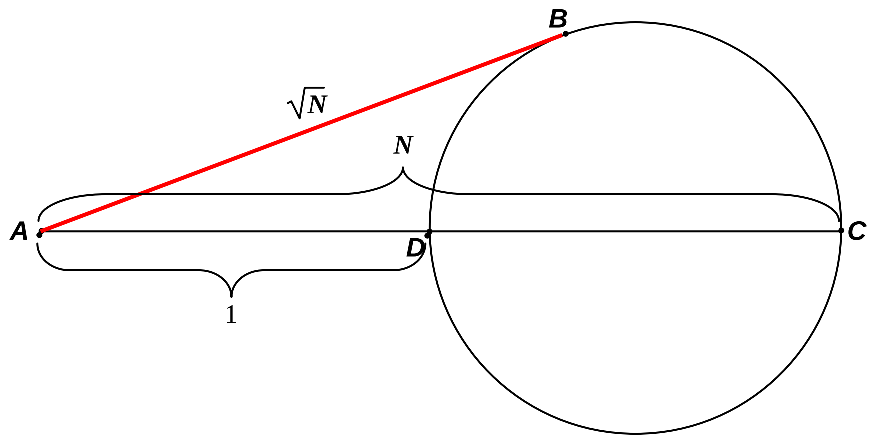
Acto seguido, se extiende el diámetro en una unidad más, para obtener un segmento de longitud $\boldsymbol{N}$:



Por fin, se construye una tangente a la circunferencia



Ya que en esta construcción, $\boldsymbol{AB} = \sqrt{\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{AD}}$, resulta que $\boldsymbol{AB} = \sqrt{1 \times \boldsymbol{N}} = \sqrt{\boldsymbol{N}}$.



Cómo usar estas construcciones para resolver geométricamente las ecuaciones cuadráticas

Un aspecto de la geometría que me cae como muy bello —por mínima que sea su utilidad práctica— es que los griegos de la antigüedad identificaron cómo resolver ecuaciones cuadráticas por medio de construcciones geométricas.

Consideremos las siguientes cuatro clases de ecuaciones cuadráticas, donde los números $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$ son todos positivos:

I. $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = 0$

II. $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{b} = 0$

III. $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{b} = 0$

IV. $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = 0$.

Las ecuaciones de la primera clase no tienen raíces positivas, por lo que, según los griegos de la antigüedad, éstas no tienen soluciones. En cambio, toda ecuación de las otras tres clases tiene al menos una raíz positiva. Para saber encontrarlas geométricamente, tenemos que escribirlas de otra forma:

II. $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{b} = 0$ se puede escribir como $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) = (\sqrt{\boldsymbol{b}})^2$.

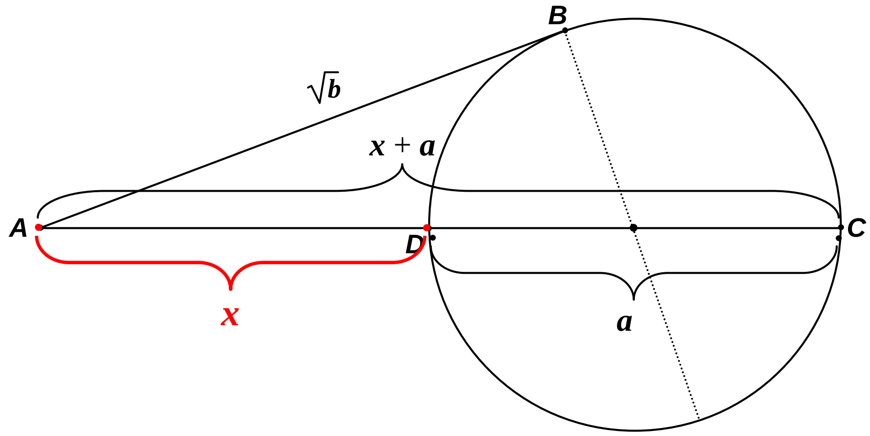
III. $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{ax} - \boldsymbol{b} = 0$ se puede escribir como $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (\sqrt{\boldsymbol{b}})^2$

IV. $\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} = 0$ se puede escribir como $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) = (\sqrt{\boldsymbol{b}})^2$

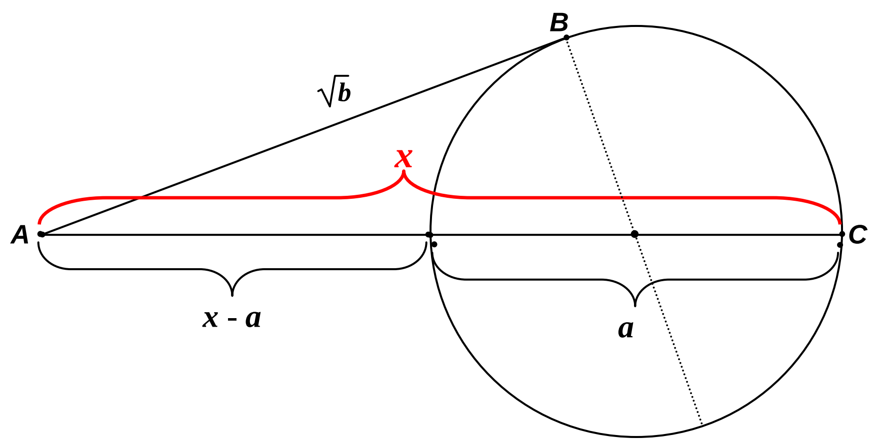
Las ecuaciones de las primeras y segundas clases tienen una sola raíz positiva. Las construcciones para ambas clases son idénticas en cuanto a sus procedimientos.

Primero, se construye un segmento de longitud $\sqrt{\boldsymbol{b}}$. Acto seguido, se construye una circunferencia de diámetro $\boldsymbol{a}$, tangente al segmento en el punto $\boldsymbol{B}$. Por fin, se dibuja una recta que pasa por $\boldsymbol{A}$ y el centro de la circunferencia. Las longitudes de los segmentos señalados, son los respectivos valores de $\boldsymbol{x}$.

Clase II: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) = \left(\sqrt{\boldsymbol{b}}\,\right)^2$

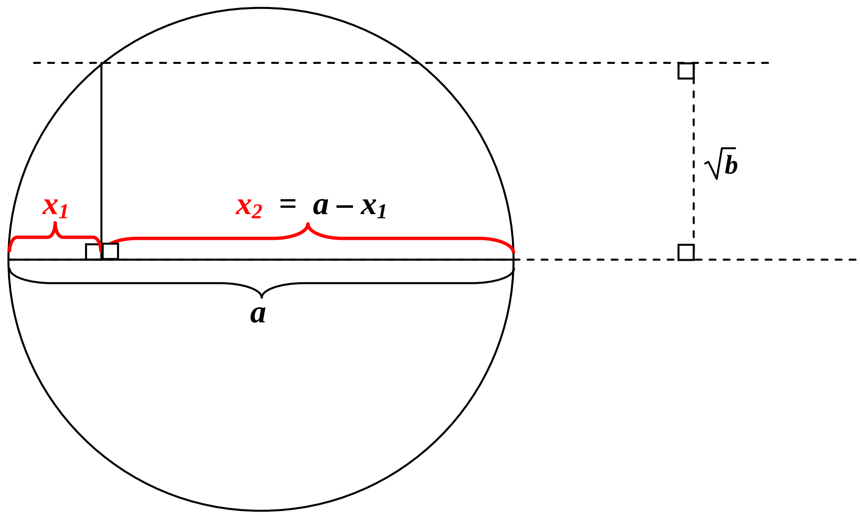


Clase III: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \left(\sqrt{\boldsymbol{b}}\,\right)^2$



Clase IV: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}) = \left(\sqrt{\boldsymbol{b}}\,\right)^2$

Ecuaciones de esta clase tienen dos raíces positivas, que las denominamos de $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$. Para encontrarlas geométricamente, se dibuja primero una circunferencia de diámetro $\boldsymbol{a}$. Después, se construye una recta paralela al diámetro de dicha circunferencia, a una distancia $\sqrt{\boldsymbol{b}}$. Esta recta cortará la circunferencia en dos puntos. Se elige uno de estos —no importa cuál. Por fin, se dibuja una recta perpendicular al diámetro, que pasa por el punto que se eligió. Las longitudes de los segmentos señalados, son los valores de $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.


x1
x2 = a – x1
√b
a