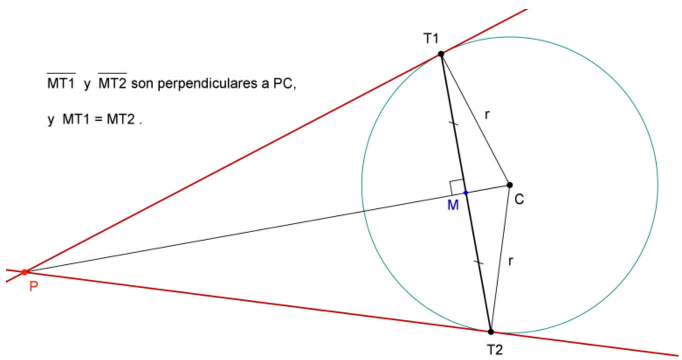
Cómo identificar los puntos de tangencia de rectas tangentes a una circunferencia dada, y que pasan por un punto dado

El procedimiento aquí presentado combina conceptos tanto de la geometría clásica, como de la analítica.

Conocimientos previos

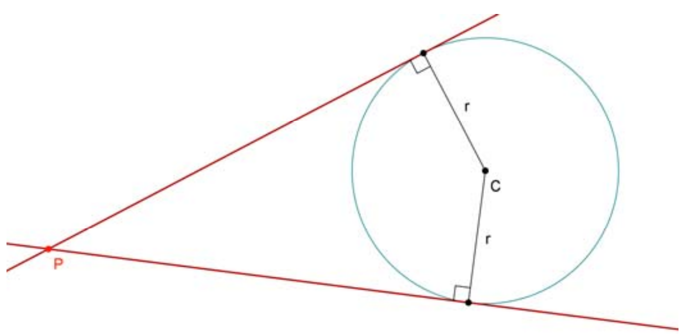
I. (Véase el siguiente diagrama.) Sea ***P*** un punto exterior a una circunferencia cuyo centro es ***C***. Sean T_1 y T_2 los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a la circunferencia, y que pasan por ***P***. Se verifica que el segmento $\overline{CP}$ es la mediatriz del segmento que une T_1 y T_2. Es decir, que $\overline{CP}$ es perpendicular al segmento $\overline{T_1T_2}$, y lo divide en dos partes iguales.



De la geometría clásica.

Nótese que según las normas de la parte del idioma de las matemáticas que trata la geometría, "$\overline{CP}$" representa el segmento cuyos puntos terminales son ***C*** y ***P***, y "***CP***" representa la longitud de dicho segmento.

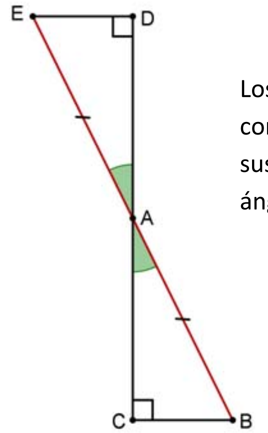
II. El radio entre el centro de una circunferencia y un punto de tangencia de una recta, es perpendicular a dicha recta.



De la geometría clásica.

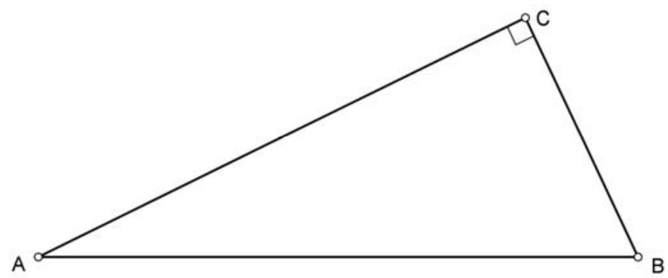
De la geometría clásica.

III. Dos triángulos rectángulos son congruentes si son iguales sus hipotenusas, y también uno de sus ángulos agudos.

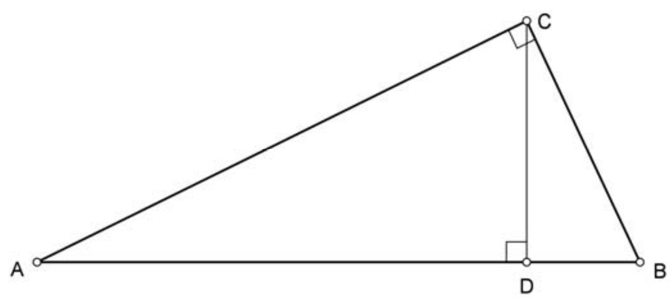


Los triángulos ***ABC*** y ***AED*** son congruentes porque son iguales sus hipotenusas, y también los ángulos ∠***CAB*** y ∠***DAE***.

IV. Para cualquier triángulo rectángulo,



si dibujamos el segmento ($\overline{\boldsymbol{DC}}$) perpendicular a la hipotenusa, y que pasa por el vértice del ángulo recto,



se verificará que

$$(BC)^2 = (BD)(BA) \text{ .}$$

De la geometría clásica. De manera parecida,

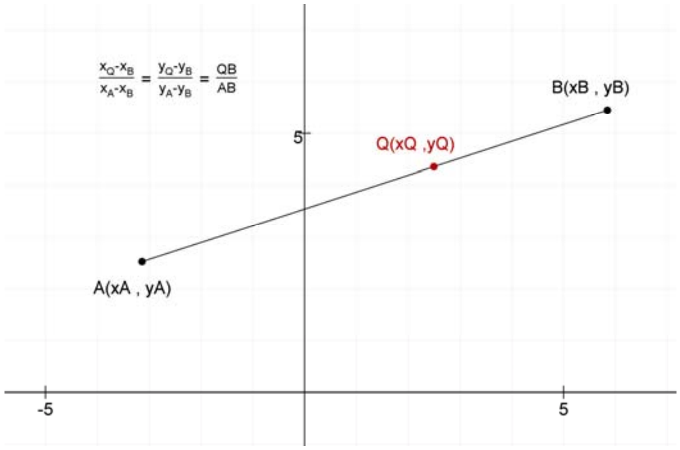
$$(AC)^2 = (AD)(AB).$$

También (pero partiendo de otras observaciones), se verifica que

$$(DC)^2 = (AD)(DB)$$

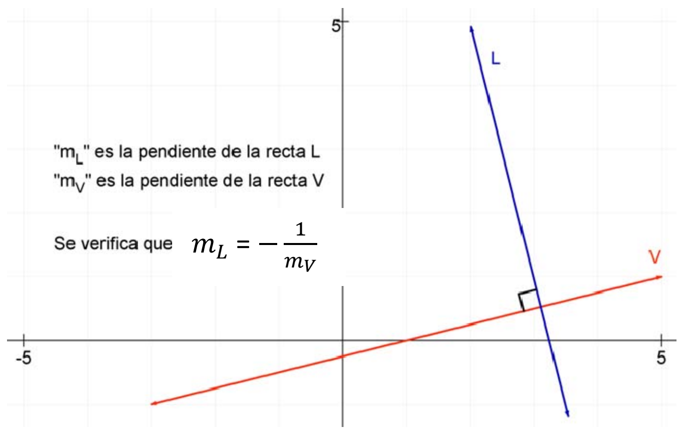
V. Para cualesquier tres puntos sobre una misma recta, existe la siguiente relación entre sus respectivas coordenadas:

De la geometría analítica.



VI. Si dos rectas son perpendiculares, la pendiente de la una es el negativo del recíproco de la otra:

De la geometría analítica.



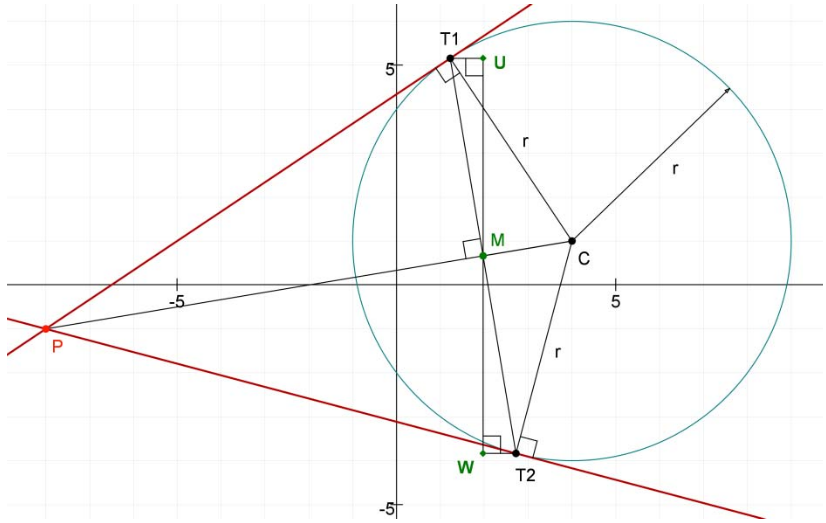
Procedimiento para encontrar las coordenadas de los puntos de tangencia

Nos referimos al siguiente diagrama, en donde

- El radio de la circunferencia dada es **r**, y su centro es el punto ***C***(x_C,y_C).
- ***P***(x_p,y_p) es el punto dado, que está afuera de la circunferencia.
- T_1 y T_2 son los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a la circunferencia, y que pasan por ***P***.
- ***M*** es el punto de intersección de $\overline{CP}$ y $\overline{T_1T_2}$.
- El segmento $\overline{UW}$ pasa por ***M*** y es paralelo al eje ***y***, por lo que los puntos ***U***, ***M***, y ***W*** tienen la misma coordenada ***x*** (= x_M).
- El segmento $\overline{UT_1}$ pasa por ***M*** y es paralelo al eje ***x***, por lo que los puntos ***U*** y T_1 tienen la misma coordenada ***y*** (= y_{T1}).

Los triángulos MWT_2 y MUT_1 fueron agregados y definidos para nuestra propia conveniencia. El paralelismo entre sus lados y los ejes, y la igualdad resultante, de las varias coordenadas, son claves para nuestro análisis.

- El segmento $\overline{WT_2}$ es paralelo al eje x, por lo que los puntos W y T_2 tienen la misma coordenada y (= y_{T2}).



Análisis geométrico

Antes de que empecemos a plasmar ecuaciones en la hoja, deberíamos examinar las características geométricas de nuestro diagrama. Notamos que

- $MT_1 = MT_2$ ("Conocimiento Previo" I). Entonces, T_1 y T_2 ocupan posiciones simétricas con respecto a M.
- Son rectos, los siguientes ángulos:
  - $\angle MUT_1$ (porque $\overline{MU}$ es paralelo al eje y, y $\overline{UT_1}$ es paralelo al eje x, and los ejes son perpendiculares el uno al otro).
  - $\angle MWT_2$ (porque $\overline{MW}$ es paralelo al eje y, y $\overline{UT_2}$ es paralelo al eje x, and los ejes son perpendiculares el uno al otro).
  - $\angle T_1MP$ y $\angle T_2MP$ ("Conocimiento Previo" I).
  - $\angle CT_1P$ y $\angle CT_2P$ ("Conocimiento Previo" II).

Notamos, además, que el segmento MT_1 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo (MUT_1) cuyos catetos miden $|y_{T1} - y_M|$ y $|x_{T1} - x_M|$.

También, el triángulo MUT_1 es congruente al MWT_2 porque sus hipotenusas son iguales ($MT_1 = MT_2$), y son iguales los ángulos agudos WMT_2 y MUT_1 ("Conocimiento Previo" III). Por lo tanto,

- $|x_{T2} - x_M| = |x_{T1} - x_M|$, y
- $|y_{T2} - y_M| = |y_{T1} - y_M|$.

Sin embargo, por nuestros conocimientos sobre la geometría analítica, sabemos que las diferencias ($x_{T2} - x_M$) y ($x_{T1} - x_M$), aunque iguales en cuanto a sus valores absolutos, tienen signos contrarios. Amén de las diferencias ($y_{T2} - y_M$) y ($y_{T1} - y_M$). Entonces,

- $(x_{T2} - x_M) = -(x_{T1} - x_M)$, y
- $(y_{T2} - y_M) = -(y_{T1} - y_M)$.

Los aspectos geométricos que acabamos de señalar nos servirán de guía para identificar, por medio del "álgebra de las coordenadas", las coordenadas del los punto de tangencia.

Estrategia para encontrar
las coordenadas de los puntos de tangencia

Consideraremos uno de los dos puntos de tangencia. No importa cuál de los dos sería, por lo que lo etiquetaremos de "***T***", sin ponerlo un subíndice. Nuestra estrategia es

1. Identificar las coordenadas de ***M***.
2. Encontrar las coordenadas de ***T*** a partir de la observación que el segmento ***MT*** es la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden $|x_M - x_T|$ y $|y_M - y_T|$.

Identificar las coordenadas de *M*— Encontraremos primero la distancia ***CM***, para luego encontrar las coordenadas de ***M***.

Para encontrar ***CM***, notamos que el triángulo "***PTC***" (sea éste PT_1C o PT_2C) es un triángulo rectángulo. Por lo tanto,

$(CM)(CP) = (CT)^2 = r^2$ ("Conocimiento Previo" IV),

luego

$$CM = \frac{r^2}{CP}\,.$$

Ahora, según el "Conocimiento Previo" V,

$$\frac{x_M - x_C}{x_P - x_C} = \frac{y_M - y_C}{y_P - y_C} = \frac{CM}{CP} = \frac{\left(\frac{r^2}{CP}\right)}{CP} = \frac{r^2}{(CP)^2} = \left(\frac{r}{CP}\right)^2\,.$$

Por consiguiente,

$$x_m = x_C + (x_P - x_C)\left(\frac{r}{CP}\right)^2,$$

y

$$y_m = y_C + (y_P - y_C)\left(\frac{r}{CP}\right)^2.$$

Encontrar las coordenadas de ***T*** - El segmento ***MT*** (sea éste MT_1 o MT_2) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $|x_T - x_M|$ y $|y_T - y_M|$. También, como vimos en el "Conocimiento Previo VI", la pendiente de ***MT*** es el negativo del recíproco de la pendiente de ***CP***, porque los dos segmentos son perpendiculares. Entonces,

$$Pendiente\ de\ MT = -\frac{1}{m_{CP}}\,,$$

o sea,

$$\frac{y_T - y_M}{x_T - x_M} = -\frac{1}{m_{CP}}\,,$$

Para encontrar la pendiente del segmento ***CP*** (m_{CP}):

$$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}\,.$$

luego

$$y_T - y_M = -\left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right).$$

Es más, según el Teorema de Pitágoras,

$$(x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2 = (MT)^2 .$$

Pero también, por el mismo teorema de Pitágoras,

$$(MT)^2 + (CM)^2 = r^2 ,$$

por lo que

$$\begin{aligned}(MT)^2 &= r^2 - (\boldsymbol{CM})^2 \\ &= r^2 - \left(\frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{CP}}\right)^{\mathbf{2}} \\ &= r^2 - \frac{r^4}{CP^2} \\ &= r^2\left(1 - \frac{r^2}{CP^2}\right),\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}MT &= \sqrt{r^2\left(1 - \frac{r^2}{CP^2}\right)} \\ &= r\sqrt{1 - \left(\frac{r}{CP}\right)^2}\,.\end{aligned}$$

Combinando estas observaciones, la ecuación

$$(\boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{x_M})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y_T} - \boldsymbol{y_M})^2 = (\boldsymbol{MT})^{\mathbf{2}}$$

se convierte en

$$(x_T - x_M)^2 + \left[-\left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right)\right]^2 = \boldsymbol{r^2}\left[\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{CP}}\right)^{\mathbf{2}}\right], \text{ o sea,}$$

$$(x_T - x_M)^2 + (x_T - x_M)^2\left(\frac{1}{m_{CP}}\right)^2 = \boldsymbol{r^2}\left[\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{CP}}\right)^{\mathbf{2}}\right].$$

$$\begin{aligned}&\left[-\left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right)\right]^2 \\ &= \left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right)^2 \\ &= (x_T - x_M)^2\left(\frac{1}{m_{CP}}\right)^2.\end{aligned}$$

Para despejar al $\boldsymbol{x_T}$, escribimos la ecuación anterior como

$$(x_T - x_M)^2\left[1 + \left(\frac{1}{m_{CP}}\right)^2\right] = r^2\left[1 - \left(\frac{r}{CP}\right)^2\right],$$

por lo que

$$\begin{aligned}(x_T - x_M)^2 &= \frac{r^2\left[1 - \left(\frac{r}{CP}\right)^2\right]}{1 + \left(\frac{1}{m_{CP}}\right)^2} \\ &= \left(\frac{(m_{CP})^2}{(m_{CP})^2}\right)\left\{\frac{r^2\left[1 - \left(\frac{r}{CP}\right)^2\right]}{1 + \left(\frac{1}{m_{CP}}\right)^2}\right\} \\ &= \frac{(m_{CP})^2 r^2\left[1 - \left(\frac{r}{CP}\right)^2\right]}{(m_{CP})^2 + 1}.\end{aligned}$$

Para terminar,

$$x_T - x_M = \pm\sqrt{\frac{(m_{CP})^2 r^2\left[1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2\right]}{(m_{CP})^2+1}}$$

$$= \pm(m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\,,$$

y

$$x_T = x_M \pm (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\,.$$

Entonces, hay dos valores de $\boldsymbol{x_T}$, uno para cada punto de tangencia. Para encontrar las coordenadas ***y*** de los dos puntos, usamos la relación que desarrollamos hace poco:

$$y_T - y_M = -\left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right)\,.$$

Según esta última, para $x_T = x_M + (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}$,

$$x_T - x_M = (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ \text{, y}$$

$$y_T - y_M = -\left(\frac{x_T - x_M}{m_{CP}}\right)$$

$$= -\left(\frac{(m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}}{m_{CP}}\right)$$

$$= -r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\,,$$

luego

$$y_T = y_M - r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\,.$$

De manera parecida, para $x_T = x_M - (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}$,

$$y_T = y_M + r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ .$$

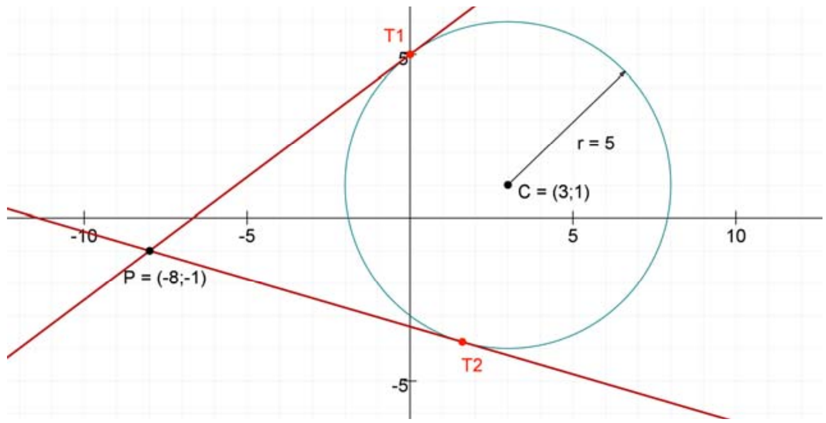
Resulta que las coordenadas de los dos puntos de tangencia son

$$\left(x_M + (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ ,\ y_M - r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}} \right), \text{ y}$$

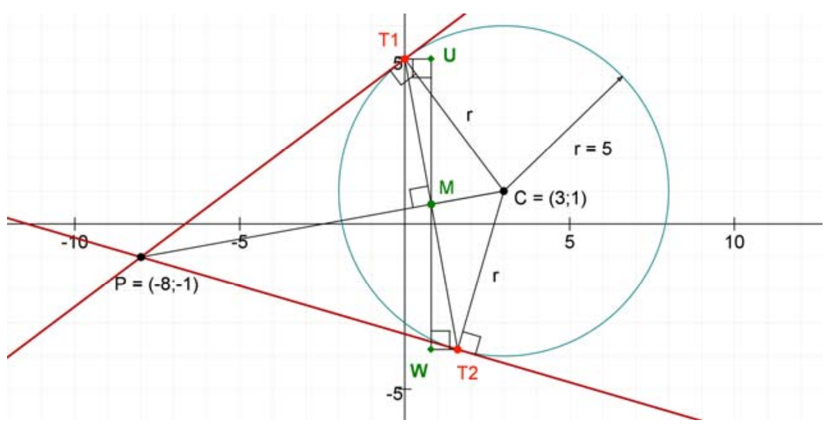
$$\left(x_M - (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ ,\ y_M + r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}} \right).$$

Un ejemplo numérico

Identifiquemos las coordenadas de los puntos de tangencia en el diagrama que sigue:



Primero, tenemos que identificar las coordenadas de ***M***. Entonces, agrego ***M*** y unos cuantos detalles más, a nuestro diagrama:



Para encontrar las coordenadas de ***M***, calculamos la longitud ***CP***:

$$
\begin{aligned}
CP &= \sqrt{(x_c - x_P)^2 + (y_c - y_P)^2} \\
&= \sqrt{\left(3 - {}^{-}8\right)^2 + \left(1 - {}^{-}1\right)^2} \\
&= \sqrt{125} \\
&= \sqrt{25 \cdot 5} \\
&= 5\sqrt{5}\ .
\end{aligned}
$$

Las coordenadas de ***M*** se calculan según

$$x_m = x_C + (x_P - x_C)\left(\frac{r}{CP}\right)^2,$$

y

$$y_m = y_C + (y_P - y_C)\left(\frac{r}{CP}\right)^2.$$

Entonces,

$$x_m = 3 + ({}^{-}8 - 3)\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= \frac{4}{5}\,.$$
$$y_m = 1 + ({}^{-}1 - 1)\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= \frac{3}{5}\,.$$

Es aconsejable (pero no es necesario) que el alumno calcule también, la longitud ***MT***:

$$MT = r\sqrt{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}$$
$$= 5\sqrt{1-\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= 5\sqrt{1-\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= 2\sqrt{5}\,.$$

La pendiente de ***CP***, sí, es necesario calcularla:

$$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{{}^{-}1-1}{{}^{-}8-3} = \frac{2}{11}\,.$$

Por fin, tenemos todos los elementos (¡y más!) que son necesarios para calcular las coordenadas de los puntos de tangencia. Uno de estos tiene las coordenadas

$$\left(x_M + (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ ,\ y_M - r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\right),$$

o sea,

$$\left(\frac{4}{5} + \left(\frac{2}{11}\right)(5)\sqrt{\frac{1-\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{2}{11}\right)^2+1}}\ ,\ \frac{3}{5} - 5\sqrt{\frac{1-\left(\frac{5}{5\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{2}{11}\right)^2+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5} - \frac{22}{5}\right),$$

$$= \left(\frac{8}{5}\ , -\frac{19}{5}\right),\ = (1.6\ , -3.8)\ .$$

De manera parecida, las coordenadas del otro punto de tangencia, o sea

$$\left(x_M - (m_{CP})r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\ ,\ y_M + r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{CP}\right)^2}{(m_{CP})^2+1}}\right),$$

son

= $\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}+\frac{22}{5}\right)$,

= $(0\ ,5)$.

En resumen, como lo muestra el siguiente diagrama, las coordenadas de los dos puntos de tangencia son

$\left(\frac{8}{5}\ ,-\frac{19}{5}\right)$, = (1.6 , -3.8) , y

$(0\ ,5)$.