Cómo sumar y restar polinomios

Ejemplo: De $4z^2 - 3z + 6$, restarle $\left(-5z^2 - 7z + 2\right)$.

1. Observaciones preliminares

"¿Por qué tenemos que dominar la suma y resta de polinomios?" Los alumnos que externan esta pregunta se merecen una respuesta seria. Reconocen que la formación que reciben—o no—durante sus breves años escolares será crítica para sus carreras, y reconocen también que si desperdician su tiempo aprendiendo cosas de poca importancia, habrá cosas importantes que no las aprenderán.

La pregunta "¿Por qué tenemos que dominar la suma y resta de polinomios?" es honesta y válida, y se merece una respuesta seria.

Es más, sin duda han escuchado repetidas veces que "Si un trabajo merece la pena hacerlo, merece la pena hacerlo bien." Bueno, hay calculadoras y programas gratuitos disponibles en línea que pueden sumar y restar polinomios infaliblemente. Por lo tanto, el alumno está en su derecho al preguntar, "¿Por qué no usamos estas herramientas para operaciones rutinarias, como la suma y resta de polinomios? Nos ahorrarían tiempo y esfuerzo que podríamos usar para aprender cosas más útiles. Por ejemplo, cómo usar matemáticas con provecho en la resolución de problemas reales."

Esta objeción, claro, es del tipo que se ha debatido desde el invento de calculadoras de bolsillo asequibles en los años 70 del siglo pasado. El contestarlo es medular a nuestro meta como educadores: el de capacitar a los alumnos para comprender situaciones reales, y responder acertadamente. Por eso, en mi opinión es importante enfatizar que las matemáticas no pueden usarse con provecho en la resolución de problemas reales (salvo los más simples) sino por personas convencidas de que las matemáticas son un cuerpo coherente de conocimientos y experiencias que les guiarán en la comprehensión y resolución del problema entre manos. Es más, las personas mismas tienen que estar convencidas de que son capaces de aplicar estos conocimientos y experiencias.

Las matemáticas no pueden usarse con provecho en la resolución de problemas reales sino por personas convencidas (1) de que las matemáticas son un cuerpo coherente de conocimientos y experiencias que las guiarán; y (2) de que *ellas mismas* son capaces de aplicar estos conocimientos y experiencias.

Entonces, ¿qué tiene que ver la suma y resta de polinomios con la formación de personas que sean capaces, y convencidas de su propia capacidad? Mi respuesta es que este tema le da al maestro una buena oportunidad para explicitar cómo los conocimientos y experiencias previos le guiarán al alumno que se enfrenta a un problema nuevo. En vez de decirle que *aprenderá a sumar y restar polinomios*, le diremos que "*desarrollará un procedimiento para sumar y restarlas*. De esta forma, el tema se convertirá en un problema real. Y en verdad, había una vez cuando era un problema tal. Es decir, cuando nadie lo había resuelto todavía, y alguien se enfrento con la necesidad de identificar cómo hacerlo.

Este documento es dirigido a maestros y alumnos igualmente, para que todos saquemos el mayor provecho posible de este tema. Intentaré poner en práctica, algunas de las sugerencias que vienen en libros acerca de la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

2. Activemos nuestra "base de datos" de conocimientos acerca de temas de posible relevancia

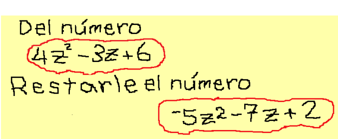
La mayor parte de este documento es un discurso al estilo "teacher talk", en el cual el maestro aparenta estar resolviendo el problema por primera vez. Externa observaciones y preguntas como si éstas se le hubieran ocurrido en el momento. Por eso, tiene una estructura un poco informal. Al final, se presentará una revisión más formal, de los trabajos.

Investigaciones sobre la resolución de problemas en general demuestran que es útil comenzar por sacar de la memoria, conscientemente, tantos conocimientos nos aparezcan relevantes. Entonces, ¿qué conocimientos previos puedan estar involucrados en la suma y resta de polinomios? Conviene examinar el ejemplo que planteamos:

$$\text{De } 4z^2 - 3z + 6, \text{ restarle } \left({}^{-}5z^2 - 7z + 2\right).$$

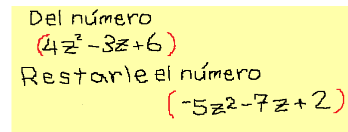
Por uno, sabemos que $4z^2 - 3z + 6$ es una secuencia de operaciones efectuadas sobre algún número (el z), y que es, a la vez, *un solo número*. ¿Por qué es $4z^2 - 3z + 6$ un solo número? Podemos razonarlo así. El z es un solo número, y por la cerradura bajo la multiplicación, la cantidad $z \cdot z$ (la cual la escribimos como z^2 para nuestra propia conveniencia) es un solo número también. A saber, el valor numérico de $z \cdot z$. Por lo mismo, la cantidad $4z^2$ es un solo número, y $3z$ también.

Por la propiedad de cerradura en la sustracción, la diferencia entre $4z^2$ y $3z$ (escrita ésta como $4z^2 - 3z$) es un solo número. Por fin, el solo número "$4z^2 - 3z$" más "6" es un solo número, gracias a la propiedad de cerradura en la suma. De forma parecida, ${}^{-}5z^2 - 7z + 2$ es simultáneamente un solo número, y una secuencia de operaciones sobre el número z.



Por lo tanto, es lícito —aunque no necesariamente resultará provechoso —idear nuestro ejemplo como se ve en la figura al margen.

En dicha figura, escribí el problema de una forma "tosca" para enfatizar que al comenzar a explorar un problema, lo importante es apuntar nuestras ideas y observaciones sin demora, y sin preocuparnos demasiado por cómo se vean. En la figura, los dos polinomios están dentro de "globos" para enfatizar que cada polinomio realmente es un solo número. Una vez apuntada la idea u observación, podemos modificar el escrito para que concuerde más con las maneras usuales de comunicar información en las matemáticas. Por ejemplo, podemos borrar la mayor parte del contorno de cada globo (ver, por favor, la segunda figura al margen) para reducirlo a un par de paréntesis, ya que éstos son la manera común para comunicar que el contenido del par es un solo número sobre el que actúa la operación que le antecede.



Al comenzar a explorar un problema, es importante apuntar nuestras ideas y observaciones sin demora, y sin preocuparnos demasiado por cómo se vean.

De aquí en adelante en este documento, las expresiones matemáticas que trabajamos no serán "dibujadas", sino escritas a maquina, comenzando con

$$\text{"De } \left(4z^2 - 3z + 6\right), \text{ restarle } \left(^{-}5z^2 - 7z + 2\right)\text{".}$$

Examinando esta representación del problema, nos preguntamos, "Qué conocimientos previos figuran en ello?" Hay una resta de una cantidad que contiene restas, por lo que (a juzgar por nuestras experiencias previas) sería útil repasar las operaciones con números negativos. Entre éstas, una propiedad útil que suele no mencionarse en las clases:

> Para cualesquier dos números (llamémoslos a y b), $a - b$ es el mismo número que $a + {}^{-}b$. Éste hecho es el que se escribe, de forma más usual, como "$a - b = a + {}^{-}b$". Por lo tanto, gracias a la Propiedad Sustitutiva de la Igualdad, podemos escribir la resta $4z^2 - 3z$ como $4z^2 + {}^{-}3z$ en cualquiera ecuación.

Es útil idear $a - b$ y $a + {}^{-}b$ como *sinónimos*, en cuanto son dos escritos que representan lo mismo. Y de ahí, que $4z^2 + {}^{-}3z$ sea una "redacción" de $4z^2 - 3z$. Todo esto, gracias a la Propiedad Sustitutiva de la Igualdad.

En cuanto a esta "redacción" del escrito $4z^2 - 3z$, sabemos que

- es lícito hacerla, pero no es obligatorio;
- no necesariamente nos resultará útil hacerlo; y
- hay veces cuando no tiene sentido hacer una "redacción" tal. Por ejemplo, ante el problema "$8 - 2 = \_$", nadie en su sano juicio lo trasformaría en "$8 + {}^{-}2 = \_$". Las dos versiones son el mismo problema,[1] pero la trasformación no nos ayuda, sino complica un

[1] Sería más correcto decir que "$8 - 2 = \_$" y "$8 + {}^{-}2$" son problemas *equivalentes*: `http://matematica.laguia2000.com/general/ecuaciones-equivalentes`.

problema fácil.

No obstante todo lo anterior, en la experiencia de muchos es útil efectuar esta redacción al manejar expresiones algebraicas, por cuanto nos ayuda a evitar errores. Entonces, efectuemos la siguiente redacción de nuestro ejemplo, en aras de identificar otros conocimientos previos de posible relevancia:

$$\text{"De } \left(4z^2 - 3z - 6\right), \text{ restarle } \left({}^{-}5z^2 - 7z + 2\right)\text{".}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{"Por favor, efectuar la resta } \left(4z^2 - 3z - 6\right) - \left({}^{-}5z^2 - 7z + 2\right)\text{".}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{"Por favor, efectuar la resta } \left(4z^2 + {}^{-}3z - 6\right) - \left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)\text{".}$$

Al examinar la última línea, reconocemos que cada par de paréntesis contiene un solo número. Entonces, "pensando el asunto más en grande", hacemos una redacción más:

$$\text{"Por favor, efectuar la resta } \left(4z^2 + {}^{-}3z - 6\right) - \left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)\text{".}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{"Por favor, efectuar } \left(4z^2 + {}^{-}3z - 6\right) + {}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)\text{".}$$

Podremos revertir nuestra redacción cuando queramos.

Hemos efectuado esta redacción a sabiendas de que podemos optar por revertirla cuando queramos. Sin embargo, sigamos en este camino por lo pronto. Al examinar lo que resultó de las redacciones, parece que valdría la pena activar nuestra base de datos acerca de números negativos, cómo sumarlos, etc. Entonces, ¿qué es lo que sabemos al respecto?

Aquí tenemos algunos ejemplos de nuestros conocimientos acerca de números negativos:

- ${}^{-}a$ es el mismo número que ${}^{-}1 \cdot a$.
  Por ejemplo, ${}^{-}7$ es el mismo número que
  ${}^{-}1 \cdot 7$, y ${}^{-}\left({}^{-}12\right)$ es el mismo número que ${}^{-}1 \cdot {}^{-}12$.
- ${}^{-}\left({}^{-}a\right) = a$.
  Por ejemplo, ${}^{-}\left({}^{-}8\right) = 8$. Igualmente, ${}^{-}\left({}^{-}\left[{}^{-}\mathbf{5}\right]\right) = {}^{-}5$.

A juzgar por la expresión que resultó de las redacciones (a saber, la expresión $\left(4z^2 + {}^{-}3z - 6\right) + {}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$) tarde o temprano tendremos que combinar términos semejantes. ¿Qué es lo que sabemos al respecto? Para comenzar, hemos aprendido que el procedimiento se apoya en la Propiedad Distributiva de la multiplicación sobre la adición. Esto es,

Para cualesquier tres números $a, b,$ y c,

$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$,
(La Propiedad Distributiva ”a la izquierda”); y

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
(La Propiedad Distributiva ”a la derecha”).

Así como es el caso para todas las ecuaciones, estas últimas se verifica en ambas direcciones. Es decir (tratando solamente la propiedad ”a la derecha”), son ciertas ambas de las siguientes:

Las ecuaciones se verifican en ambas direcciones.

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, y
$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$.

Esta última (o sea, $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$) es la versión que se usa para justificar el procedimiento que se llama ”combinar términos semejantes”. Por ejemplo, comparemos el escrito $4x + 11x$ con el enunciado de la Propiedad Distributiva a la derecha:

$\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{11}\boldsymbol{x} = (\mathbf{4} + \mathbf{11})\,\boldsymbol{x}$ (=15x)
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Vemos que la x multiplicaba, por el lado derecho, al 4 y al 11. Entonces, la x tomó el papel de c, y los números 4 y 11 tomaron los papeles de a y b, respectivamente.

Por supuesto, al trabajar un problema real no nos molestamos por apuntar un paso intermediario como el ”$= (4 + 11)\,x$” en un caso tan simple como $4x + 11x$. Pero sí debemos saber que el procedimiento se apoya en la Propiedad Distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Antes de que cambiemos a tratar otros conocimientos previos, deberíamos agregar que la Propiedad Distributiva se puede extender a cualquier número de términos:

$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

$(a+b+c)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x + c\cdot x$
$(a+b+c+d)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x + c\cdot x + d\cdot x,$
etc.

Arriba, mencionamos que ecuaciones ”se verifican en ambas direcciones”. Puede que sea provechoso activar nuestra base de datos al respecto más aún, escribiendo en ambas direcciones algunas de las propiedades que hemos sacado de la memoria:

- $a - b = a + {}^{-}b; \qquad a + {}^{-}b = a - b$
- ${}^{-}a = {}^{-}1\cdot a; \qquad {}^{-}1\cdot a = {}^{-}a$
- ${}^{-}\left({}^{-}a\right) = a; \qquad a = {}^{-}\left({}^{-}a\right)$
- $(a+b+c)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x + c\cdot x;$
  $a\cdot x + b\cdot x + c\cdot x = (a+b+c)\cdot x.$

Una observación final acerca de nuestros conocimientos y experiencias previos: éstos nos han mostrado que no será necesario buscar, al menos al principio, la técnica más rápida y eficiente para restar polinomios, sino una que la entendamos cabalmente. Después, podremos ”pulirla” si vale la pena.

3. Desarrollemos un procedimiento para restar polinomios

En el curso de activar nuestra base de datos acerca de experiencias y conocimientos previos, de posible relevancia (Apartado 2), efectuamos una secuencia de ”redacciones” que trasformaron nuestro ejemplo en

Efectuar $\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) + {}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$.

Al parecer, bien puede ser que la técnica para restar polinomios se reducirá a una cuestión de combinar términos semejantes. Pero hay un detalle: todos los términos están dentro de paréntesis. Es más, uno de los pares de paréntesis tiene un signo negativo.

Entonces, ¿qué haremos para acceder a los términos?

Tal vez el primer par de paréntesis (es decir, el que contiene el número $4z^2 + {}^-3z + 6$) se pueda borrar, y ya. Pero, ¿qué propiedades de los números justificarían este cambio? Es más, el segundo par definativamente no se puede "borrar", ya que tiene un signo negativo. Sin embargo, con reconocer esta posible diferencia entre los dos pares de paréntesis, hemos avanzado: puede que la clave sea la de identificar cuándo se pueden borrar paréntesis, y cuándo no. Entonces, revisemos nuestros conocimientos previos para encontrar casos donde sí, quitamos paréntesis. No nos costará mucho tiempo para ver que esto sucedió en el enunciado de la Propiedad Distributiva de la multiplicación sobre la suma:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Por ejemplo,

$$2\,(15x + 8) = 2 \cdot 15x + 2 \cdot 8 = 30x + 16.$$

Entonces, si hubiera números multiplicando a nuestros pares de paréntesis, sabríamos exactamente qué hacer. Por lo tanto, nos preguntamos si hemos visto alguna equivalencia que tenga la forma

$$\textit{Un número} = \textit{El mismo número, multiplicado por algún otro número}.$$

También, ya que ${}^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right)$ es el negativo de $\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right)$, nos preguntamos si hemos visto algún alguna equivalencia que tenga la forma

$$\begin{aligned}\textit{El negativo de un número} =& \textit{El mismo número,}\\ & \textit{multiplicado por algún otro número}.\end{aligned}$$

Ruminémoslo un poco. En el caso de ${}^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right)$, *tenemos* un número negativo (a saber, el negativo del "globo" del que los paréntesis son vestigios), pero *nos hace falta* una multiplicación, para que utilicemos la Propiedad Distributiva. ¿Nos suena esto? ¿El que el negativo de un número es equivalente al producto del mismo número, con algún otro número?

Resulta que sí: es una de las propiedades de números negativos que vimos al revisar nuestra base de datos:

$${}^-a = {}^-1 \cdot a.$$

Entonces —nos ayude o no —es cierto que

$$^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) = {}^-1 \cdot \left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right).$$

Y sí, nos ayuda, porque ahora vemos cómo abrir los paréntesis:

Se nota que el efecto del signo negativo afuera de los paréntesis ha sido el de cambiar el signo de cada término en el interior. Si Ud. intuyó (o sea "conjeturó") que resultaría así, ¡qué bueno! Ahora, Ud. sabe cómo apoyar su conjetura en las propiedades de los números. (Por cierto, el símbolo "$\therefore$" significa "por lo tanto".)

$$\begin{aligned} ^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) &= {}^-1 \cdot \left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) \\ &= {}^-1 \cdot {}^-5z^2 + {}^-1 \cdot {}^-7z + {}^-1 \cdot 2 \\ &= 5z^2 + 7z + {}^-2 \\ \therefore {}^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) &= 5z^2 + 7z + {}^-2. \end{aligned}$$

Reflexionando sobre lo que acabamos de escribir, nos damos cuenta de que "abrimos los paréntesis" identificando una expresión (la "$5z^2 + 7z + {}^-2$") equivalente a la expresión dada (la $^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right)$). Éste tipo de maniobra —la trasformación de una expresión dada, en una que nos conviene más, mediante la sustitución de expresiones equivalentes —le servirá al lector para resolver muchos problemas en el futuro.

Bueno, ha funcionado bien, nuestra idea de trasformar el "negativo de un par de paréntesis" en un producto del paréntesis con algún otro número. Entonces, es razonable preguntar si una idea parecida funcionaría para abrir el otro par de paréntesis. Por lo pronto, escribamos la siguiente ecuación en aras de identificar cuál sería este "*Algún número*" (suponiendo que éste sí, existe):

$$\text{"}\textit{Algún número}\text{"} \cdot \left(4z^2 + {}^-3z + 6\right) = \left(4z^2 + {}^-3z + 6\right)$$

"*Algún número*" tendría que ser "1", claro, pero demostremos que así es, a través de un despeje:

$$\begin{aligned} \text{"}\textit{Algún número}\text{"} \cdot \left(4z^2 + {}^-3z + 6\right) &= \left(4z^2 + {}^-3z + 6\right) \\ \therefore \text{"}\textit{Algún número}\text{"} &= \frac{\left(4z^2 + {}^-3z + 6\right)}{\left(4z^2 + {}^-3z + 6\right)} \\ \therefore \text{"}\textit{Algún número}\text{"} &= 1, \end{aligned}$$

con tal que $\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) \neq 0$. Identificado este *"Algún número"*, ahora podemos efectuar la siguiente redacción:

$$\begin{gathered}
\text{"\textit{Algún número}"} \cdot \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) = \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) \\
\Downarrow \\
1 \cdot \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) = \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) \\
\Downarrow \\
\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) = 1 \cdot \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) \\
\Downarrow \\
\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) = 1 \cdot 4z^2 + 1 \cdot {}^{-}3z + 1 \cdot 6 \\
\Downarrow \\
\therefore \left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) = 4z^2 + {}^{-}3z + 6.
\end{gathered}$$

¡Las ecuaciones se verifican en ambas direcciones!

Otra vez, los paréntesis se abren identificando una expresión equivalente a la dada. Con esto, hemos producido una justificación rigurosa para nuestra conjetura inicial, de que cuando no hay ningún número multiplicando a los paréntesis, podemos simple y sencillamente "borrarlos", así como para la conjetura de que un signo negativo afuera de los paréntesis cambia el signo de cada término en el interior. Por lo tanto, en el futuro no será necesario presentar una justificación rigurosa cuando sustituyamos (para dar ejemplos genéricos)

En el futuro no será necesario presentar una justificación rigurosa en casos tales.

$$\begin{gathered}
(a + b + c) \text{ por } a + b + c, \\
\text{o} \\
{}^{-}(a + b + c) \text{ por } {}^{-}a + {}^{-}b + {}^{-}c.
\end{gathered}$$

Ahora bien, en los últimos párrafos hemos salido por la tangente, por lo que ya es indicado apuntar claramente qué es lo que queremos lograr; hasta qué punto hemos avanzado; y qué es lo nos hace falta para terminar:

1. Queremos efectuar $\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) + {}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$;
2. Conjeturamos que el efectuarlo se reduciría a una cuestión de combinar términos semejantes;
3. Vimos que para poder hacerlo, tendríamos que "abrir los paréntesis" para acceder a los términos;
4. Demostramos que éstos se pueden abrir identificando expresiones equivalentes a las dadas (o sea, a la $\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right)$ y la ${}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$);

5. Ahora, sabemos que para bien o para mal, podemos usar dichas expresiones equivalentes como sinónimos" en una redacción de $\left(4z^2 + {}^{-}3z + 6\right) + {}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$;

6. Sin embargo, todavía no hemos identificado *exactamente* cómo seguir.

Entonces ¿por qué no hacer la redacción arriba mencionada (en el número 5 en la lista), para luego reflexionar lo que resulte, y actuar en consecuencia? Nuestra expresión para redactar es

$$\left(\mathbf{4z^2 + {}^{-}3z + 6}\right) \quad + \quad {}^{-}\left(\mathbf{{}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2}\right)$$

Las expresiones equivalentes a cada par de paréntesis son

Para $\left(\mathbf{4z^2 + {}^{-}3z + 6}\right)$: $\mathbf{4z^2 + {}^{-}3z + 6}$
Para ${}^{-}\left(\mathbf{{}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2}\right)$: $\mathbf{5z^2 + 7z + {}^{-}2}$.

Entonces, la redacción sería

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{4z^2 + {}^{-}3z + 6}\right) \quad + \quad {}^{-}\left(\mathbf{{}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2}\right) \\ \Downarrow \\ \mathbf{4z^2 + {}^{-}3z + 6} \quad + \quad \mathbf{5z^2 + 7z + {}^{-}2}.\end{gathered}$$

Cabe precisar que con $\Longrightarrow$ escribir la línea señalada, acabamos de efectuar la resta, en el sentido de que encontramos un solo polinomio, sin paréntesis, que es equivalente a la diferencia entre los dos que figuran en la resta original. Pero por o general, es menester ponerlo un resultado tal, en una forma estándar para la conveniencia de los lectores. (¡Por no mencionar que también es conveniente para pasar nuestros examenes!)

¿Nos ayuda, la expresión que ha resultado de la redacción? Sí, porque ahora se ve que para terminar, solamente tenemos que combinar términos semejantes. (Con esto, queda verificada otra conjetura nuestra.) La expresión en la última línea es una cadena de sumas, por lo que podemos re-ordenar los términos a nuestro antojo, para luego emplear la Propiedad Distributiva de la multiplicación sobre la suma. Con fines de precisión, presentemos una redacción un poco rigurosa, paso a paso. (De aquí en adelante, no se usarán colores.)

$$\begin{gathered}4z^2 + {}^{-}3z + 6 \quad + \quad 5z^2 + 7z + {}^{-}2 \\ \Downarrow \\ 4z^2 + 5z^2 + {}^{-}3z + 7z + 6 + {}^{-}2 \\ \Downarrow \\ (4+5)\,z^2 + ({}^{-}3 + 7)\,z + (6 + {}^{-}2) \\ \Downarrow \\ \text{En definitiva, } 9z^2 + 4z + 4.\end{gathered}$$

Ya está en una $\Longrightarrow$ forma estándar.

4. Revisemos nuestros trabajos

Deberíamos ahora revisar nuestros trabajos. Comprobaremos nuestra respuesta, para luego reflexionar sobre cómo nos acercamos al problema, y cómo lo resolvimos. Al final, resumiremos lo que hayamos aprendido.

4.1. Comprobación de la respuesta

Primero, haremos una comprobación numérica, sustituyendo por z varios números específicos, para saber si (al menos para unos cuantos valores de z) el valor de $9z^2+4z+4$ coincide con el número que resulte cuando al polinomio $4z^2-3z+6$, se le resta el polinomio $^{-}5z^2-7z+2$.

En $z=0$, $9z^2+4z+4=4$.
Para cotejarlo:
$4z^2-3z+6=6$, y $^{-}5z^2-7z+2=2$.
$6-2=4$. Está bien.

En $z=1$, $9z^2+4z+4=17$.
Para chequearlo:
$4z^2-3z+6=7$, y $^{-}5z^2-7z+2={}^{-}10$.
$7-{}^{-}10=7+{}^{-}({}^{-}10)=7+10=17$. Está bien.

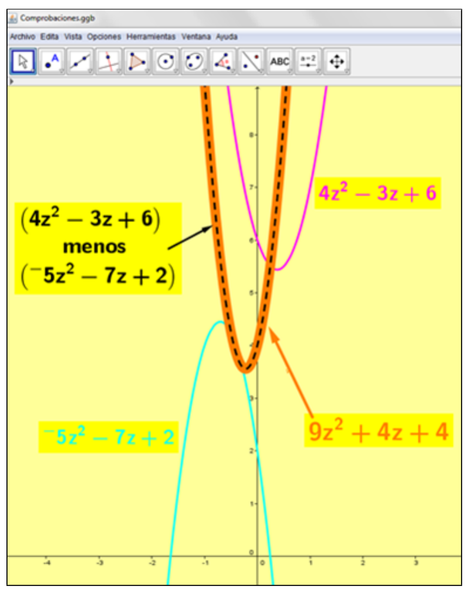
En $z={}^{-}2$, $9z^2+4z+4=32$.
Para chequearlo:
$4z^2-3z+6=28$, y $^{-}5z^2-7z+2={}^{-}4$.
$28-{}^{-}4=28+{}^{-}({}^{-}4)=28+4=32$. Está bien.

Podemos hacer un comprobación numérica más fácilmente, usando una hoja de cálculo. Por ejemplo, aquella que es parte del programa gratuita GeoGebra[2] En la figura abajo, se presentan los valores de $4z^2-3z+6$, de $^{-}5z^2-7z+2$, de $\left(4z^2-3z+6\right)-\left({}^{-}5z^2-7z+2\right)$, y de $9z^2+4z+4$ en el intervalo $^{-}2.5\le z\le 2.5$:

[2]http://geogebra.org.

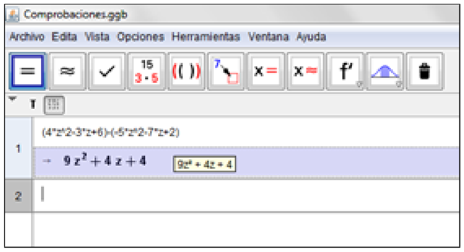
z	$4z^2-3z+6$	$-5z^2-7z+2$	$4z^2-3z+6$ menos $-5z^2-7z+2$	$9z^2+4z+4$
-2.5	38.5	-11.75	50.25	50.25
-2	28	-4	32	32
-1.5	19.5	1.25	18.25	18.25
-1	13	4	9	9
-0.5	8.5	4.25	4.25	4.25
0	6	2	4	4
0.5	5.5	-2.75	8.25	8.25
1	7	-10	17	17
1.5	10.5	-19.75	30.25	30.25
2	16	-32	48	48
2.5	23.5	-46.75	70.25	70.25
3	33	-64	97	97

También, con GeoGebra podemos hacer una comprobación mediante una representación visual:



En el intervalo mostrado, por lo menos, las curvas para $\left(4z^2-3z+6\right)-\left({}^{-}5z^2-7z+2\right)$ y $9z^2+4z+4$ coinciden.

Mejor todavía, GeoGebra cuenta con un Sistema de Cálculo Simbólico (CAS, por sus siglas en inglés) con el que podemos efectuar, directamente, la resta $\left(4z^2-3z+6\right)-\left({}^{-}5z^2-7z+2\right)$ para verificar que la respuesta es $9z^2+4z+4$:



Aunque éste (el CAS) es el método más fácil para comprobar nuestra respuesta, lo presenté al final porque cada representación (e.g., numérica, visual, or simbólica) de un problema y su solución tiene sus puntos fuertes y débiles. Por lo tanto, ante un problema nuevo (acuérdese de que tratamos la resta de polinomios como un problema tal, para que el alumno sacara mayor provecho del tema) es indicado utilizar múltiples representaciones.

Con ésto, hemos comprobado nuestra respuesta mediante representaciones númerica, visual, y simbólica.

4.2. Reflexionando sobre cómo nos acercamos al problema, y cómo lo resolvimos

Para acercarnos al problema, examinamos la estructura de la forma escrita de nuestro ejemplo:

$$\left(4z^2 + {}^{-}3z - 6\right) - \left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right).$$

Nos dimos cuenta que al parecer, se iba a reducir a una cuestión de ”abrir paréntesis”, para luego combinar términos semejantes. Notamos también, que a la mejor tendríamos que restar números negativos.

Por eso, ”revisamos nuestra banco de datos” acerca de temas relacionados a estas operaciones. Nos acordamos de que (entre otras cosas) las ecuaciones se verifican en ambas direcciones. También, reconocimos que expresiones matemáticas equivalentes pueden idearse como sinónimos”, y las trasformaciones de expresiones como ”redacciones” de las mismas. Un conocimiento clave fue el que una expresión matemática es, a la vez, una secuencia de operaciones con números, y un solo número. Concretamente, ${}^{-}\left({}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2\right)$ es un solo número —a la par que una secuencia de operaciones—y es el negativo del número ”${}^{-}5z^2 + {}^{-}7z + 2$”.

Con estas ideas en la mente, buscamos cómo abrir los paréntesis. Identificamos expresiones equivalentes a cada paréntesis, a saber

$$\begin{aligned}\left(4z^2 + {}^-3z + 6\right) &= 1 \cdot \left(4z^2 + {}^-3z + 6\right) \quad \text{y} \\ {}^-\left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) &= {}^-1 \cdot \left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right)\end{aligned}$$

que nos posibilitaron utilizar la Propiedad Distributiva de la multiplicación sobre la suma. Abiertos los paréntesis, combinamos los términos semejantes.

Hagamos unas cuantas observaciones más, antes de que terminemos:

- Nuestro ejemplo fue una resta, pero en el curso de resolverlo, lo convertimos en una suma:

  $$\begin{gathered}\left(4z^2 + {}^-3z - 6\right) - \left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right) \\ \Downarrow \\ \left(4z^2 + {}^-3z - 6\right) \color{red}{+{}^-} \left({}^-5z^2 + {}^-7z + 2\right).\end{gathered}$$

  Por lo tanto, el procedimiento que desarrollamos para la resta servirá también para sumar polinomios, con una sola diferencia: no será necesario cambiar los signos de términos en el interior del segundo par de paréntesis.

- Dejamos al último la elaboración y examinación de representaciones numérica y visual del ejemplo. Ante un problema real, una omisión tal sería una negligencia. Discutiblemente, debíamos de haberlas elaborado y examinado al comienzo de nuestros trabajos..

- El programa GeoGebra es una herramienta poderosa y fácil de usar. Las pocas horas necesarias para aprenderlo le pagarán con creces al alumno. Es más, GeoGebra mantiene un sitio[3] al que maestros y alumnos de todas partes del mundo suben recursos que elaboran, para el acceso libre y gratuito del público en general.

  El Profesor Nelson Lillo Terán, de Chile, encabeza un grupo LinkedIn dedicado al uso de GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, química, y física.[4]

- Para ejercicios y más información acerca de este tema, ver, por favor Capítulos 8, 10, y 11 de este documento.

---

[3] http://tube.geogebra.org. Los recursos regalados por su servidor pueden ser examinados y bajados en http://tube.geogebra.org/jimsmithinchiapas.

[4] Perfil del Profesor Lillo: https://www.linkedin.com/profile/view?id=61844329. Su grupo LinkedIn es ”Matemática, Física, Química y GeoGebra”.