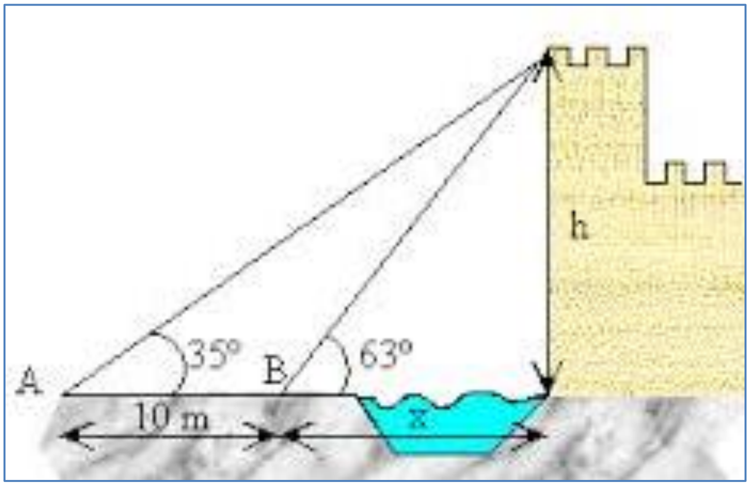
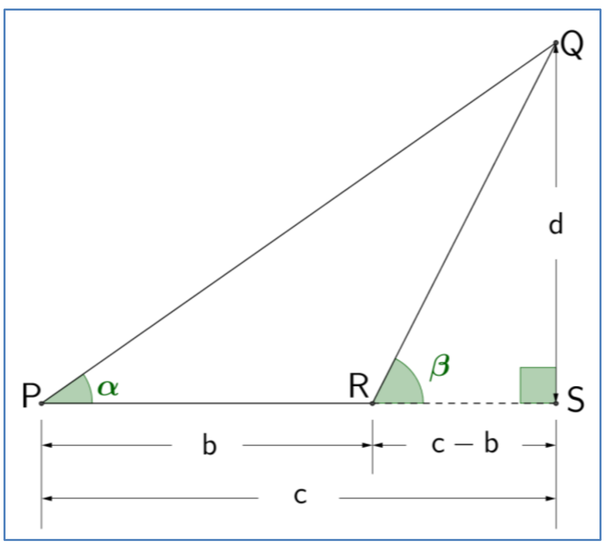
Un Problema con “triángulos rectángulos simultáneos”

Encontrar **h** y **x** usando relaciones trigonométricas para triángulos rectángulos.



Vamos a trabajar una versión “genérica” del problema. Tenemos que encontrar las longitudes **d** y **c**. Los datos son la longitud **b**, y las medidas angulares **α** y **β**.



Hay dos observaciones claves: (1) Ángulo PSQ es recto; y (2) podemos tratar este problema como un caso de “triángulos rectángulos simultáneos” que comparten el cateto SQ. Al analizar triángulo PSQ, vemos que $\frac{d}{c} = \tan\alpha$. A partir del triángulo RSQ, se ve que $\frac{d}{c-b} = \tan\beta$. Pero nos conviene escribir éstas como

$\frac{c}{d} = \frac{1}{\tan\alpha}$, y (1)

$\frac{c-b}{d} = \frac{1}{\tan\beta}$; la cual puede escribirse en la forma $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\beta}$.[1] (2)

¿Por qué las escribimos así? Porque tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas (**c** y **d**). Tenemos que obtener una sola ecuación que contenga una sola incógnita. Afortunadamente, ecuación (1) nos da una

---

[1] La cociente $\frac{1}{\text{ls tangente de }\theta}$ es la función trigonométrica que se llama “la cotangente de θ‘, pero ya que algunos maestros la enseñan en sus clases de la trigonometría introductoria, no la usaremos aquí.

expresión equivalente a $\frac{c}{d}$, cantidad que aparece en ecuación (2) también. Entonces, efectuamos la siguiente “redacción” de la ecuación (2):

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\beta}; \qquad (3)$$

por lo tanto, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\alpha}} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\beta}$, (4)

porque ecuación (1) nos dice que $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ y $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\alpha}}$ son “sinónimos”: es decir, son dos maneras de escribir el mismo número. Esto es lo que el símbolo “=” indica en este contexto. Por eso, es lícito—pero ¡no necesariamente provechoso!—efectuar la sustitución. En este caso, sí, es provechoso porque ecuación (4) es exactamente lo que queríamos obtener: una sola ecuación con una sola incógnita (la **d**). Ahora, la despajamos. Hay varias maneras de hacerlo, una de las cuales es la secuencia

$$\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\beta}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} = \frac{1}{\tan\beta} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\beta} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta} = \frac{1}{\tan\beta} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}} - \frac{1}{\tan\beta}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}$$

$$d\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right) = d\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}\right)$$

$$d\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right) = b$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right)}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{b}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{b}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\alpha}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\beta}}}\,. \qquad (5)$$

Este resultado nos permite calcular nuestro valor específico de **d**, a partir de los datos **b**, **α**, y **β**. Es más, este resultado nos dice que $\frac{b}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}}$ es un “sinónimo” para **d**. Podemos usarlo para identificar **c** a partir de ecuación (1), mediante la siguiente “redacción”:

$\frac{c}{d} = \frac{1}{\tan\alpha}$ (de ecuación (1))

$$\left(\frac{c}{d}\right)d = \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)d$$

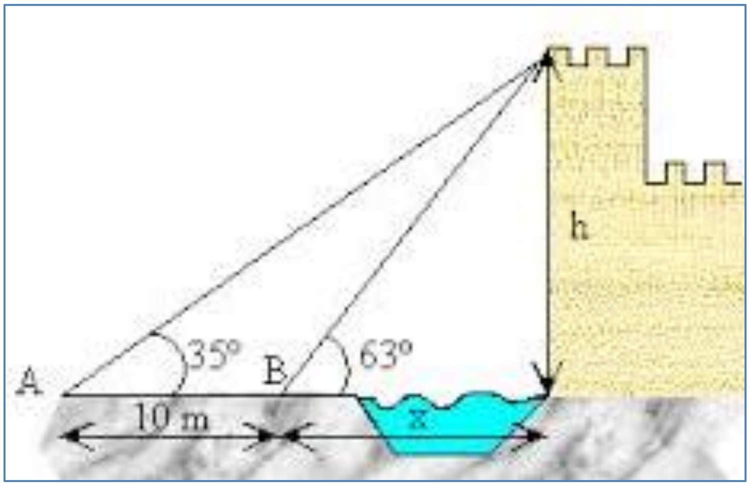
$$c = \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)\boldsymbol{d}$$

$$c = \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\alpha}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tan\beta}}}\right)$$

$$c = \frac{b}{\tan\alpha\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right) - \tan\alpha\left(\frac{1}{\tan\beta}\right)}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{b}{1 - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}}}\,. \tag{6}$$

En el problema específico que nos toca resolver,



,

b=10 m, α=35°, y **β**=63. La longitud **d** es **h**. Tan35°=0.7002, y tan63°=1.9626. Por lo tanto, acorde a ecuación (5),

$$\boldsymbol{d = \frac{b}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}}},$$

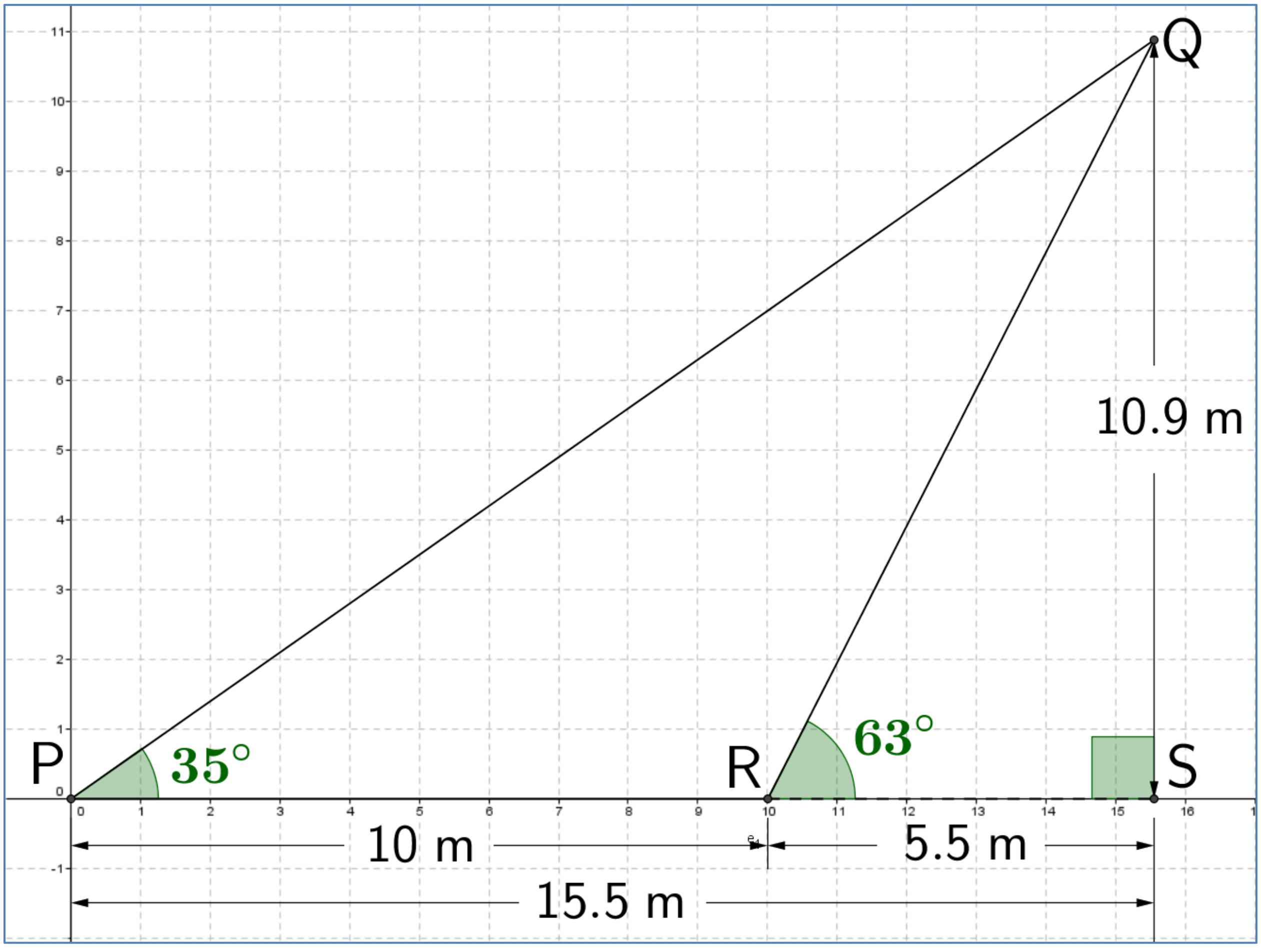
el valor de **h** es

$$\boldsymbol{h} = \frac{10\ m}{\frac{1}{0.7002} - \frac{1}{1.9626}} = \underline{\underline{10.9\text{ m}}}.$$

Ahora, usamos ecuación (6) para calcular **c**:

$$\boldsymbol{c} = \frac{b}{1 - \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}} = \frac{10\ m}{1 - \frac{0.7002}{1.9626}} = \underline{\underline{15.5\text{ m}}}.$$

Podemos chequear los resultados mediante el siguiente diagrama, hecho con GeoGebra. Las indicaciones sobre los ejes confirman que **h** es casi 11 m, y que **c** es 15.5 m:



Con provecho, ahora podríamos repasar nuestra solución, y analizar las fórmulas que obtuvimos. Por ejemplo, la ecuación

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{b}}{\frac{\mathbf{1}}{\tan \boldsymbol{\alpha}} - \frac{\mathbf{1}}{\tan \boldsymbol{\beta}}},$$

Indica que **d** es proporcional a **b**, si **a** y **b** se mantienen constantes. ¿Puedes demostrar que es cierto, a través de algún diagrama? También, en un problema como el nuestro, ¿es el denominador positivo, siempre?

Fin