La resolución de triángulos no rectángulos

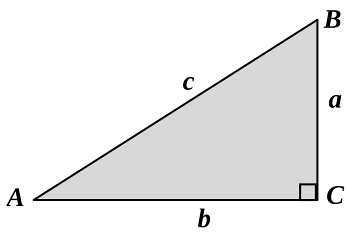
Por lo general, la resolución de triángulos oblicuángulos (o sea, no rectángulos) se enseña por presentar y demostrar las leyes del seno y coseno. Pero un día, en una clase de preparación para los exámenes de selección, una alumna mía que desconocía estas leyes tuvo que resolver un problema que trató un triángulo oblicuángulo.

En vez de rendirse, ella y sus compañeros intentaron resolverlo partiendo de las observaciones que se usan para demostrar las leyes. No les alcanzaron el tiempo para llevar a cabo su resolución, pero sus ideas fueron acertadas, y lo que es más, les habían ocurrido espontáneamente. Por lo tanto, decidí usarlas como el punto de partida de esta lección.

En este capítulo:

- **Un repaso de nuestros conocimientos sobre la trigonometría con triángulos rectángulos**
- **En cuanto a los triángulos oblicuángulos: Explorando la idea que tuvo la alumna**
- **Lo que ha resultado de nuestra exploración**
- **Unos cuantos ejemplos**
- **Una investigación sobre los casos "ambiguos"**
- **La resolución de triángulos obtusángulos a través de la idea que tuvo la alumna**
- **¿Nos es lícito definir el seno y el coseno a nuestro gusto?**
- **Cómo el seno y el coseno se pueden definir para cualquier ángulo, sin importar su tamaño**
- **Más ejemplos**
- **Ejercicios y respuestas**
- **Resumen del capítulo.**
- **Demostración de que la resolución de los casos ambiguos por medio de la Ley de los Cosenos, requiere que se defina $\cos(\theta) \equiv \cos(180°-\theta)$ para $90°<\theta<180°$**
- **¿Qué pasa cuando las Leyes del Seno y del Coseno se aplican a los triángulos rectángulos?**

Triángulo rectángulo de referencia para la nomenclatura



Un repaso de nuestros conocimientos sobre la trigonometría con triángulos rectángulos

Nomenclatura

De costumbre, el ángulo recto se denomina ***C***. La longitud de la hipotenusa se representa por la letra ***c*** minúscula.

Los ángulos agudos se denominan ***A*** y ***B***. La letra ***a*** minúscula representa la longitud del cateto opuesto al ángulo ***A***, y la ***b*** minúscula representa la longitud del cateto opuesto al ángulo ***B***.

Con frecuencia, letras griegas como θ y ϕ se usan para representar medidas de ángulos.

Las definiciones de las razones trigonométricas

Razón	Abreviaturas	Definición (¡Todas son Fracciones!)
seno	sen*A*, sen*B*	$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$, $\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$ (Seno = cateto opuesto entre hipotenusa)
coseno	cosA, cos*B*	$\cos A = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$ (Coseno = cateto adyacente entre hipotenusa)
tangente	tan*A*, tan*B*	$\tan A = \frac{a}{b}$, $\tan B = \frac{b}{a}$ (Tangente = cateto opuesto entre cateto adyacente)

Otras observaciones útiles

- sen*A* = cos*B*, y sen*B* = cos*A*.

Es decir, el valor del seno de cualquier de los dos ángulos en un triángulo recto es igual al valor del coseno de otro ángulo agudo en el triángulo.

- $\tan \mathrm{A} = \frac{1}{\tan \mathrm{B}}$, y $\tan \mathrm{B} = \frac{1}{\tan \mathrm{A}}$.

O sea, los tangentes de ***A*** y ***B*** son recíprocos, el uno del otro.

- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, luego $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, y $\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$.

Es decir, la cuadrada del seno de cualquier ángulo y la cuadrada del coseno del mismo ángulo suman a 1.

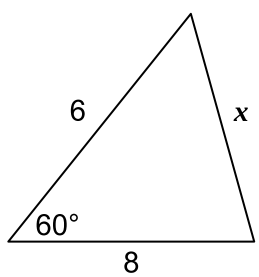
Unas cuantas de las verdades que podemos escribir acerca de los triángulos rectángulos

Con base en las relaciones que las definiciones y observaciones arriba presentadas nos cuentan, podemos demostrar muchas otras verdades acerca de los triángulos rectángulos. Por ejemplo,

Unas cuantas verdades sobre los triángulos rectángulos		
Verdades sobre *a*	**Verdades sobre *b***	**Verdades sobre *c***
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $a = c \cdot \operatorname{sen} A$ $a = c \cdot \cos B$ $a = b \cdot \tan A$ $a = \dfrac{b}{\tan B}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $b = c \cdot \operatorname{sen} B$ $b = c \cdot \cos A$ $b = a \cdot \tan B$ $b = \dfrac{a}{\tan A}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$ $c = \dfrac{a}{\cos B}$ $c = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$ $c = \dfrac{b}{\cos A}$

En cuanto a los triángulos oblicuángulos: Explorando la idea que tuvo la alumna

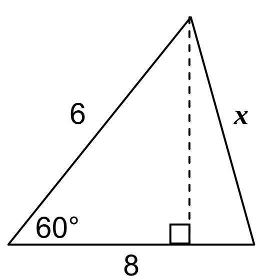
Ante el siguiente problema,



Encontrar **x** .

la alumna tuvo esta idea.

Primero, agregar al diagrama anterior, un segmento perpendicular a la base, y que pase por el vértice superior:

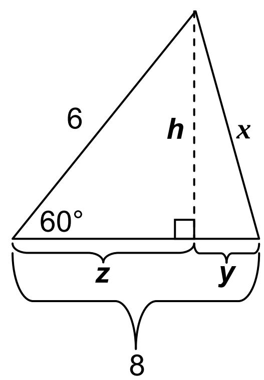


Antes de que sigamos adelante, debería mencionarse que éste es un buen uso de técnicas comunes en la resolución de problemas. Primero, ya que tenemos ciertos conocimientos sobre la resolución de triángulos rectángulos, ¿por qué no buscar la forma de emplearlos en la resolución de triángulos oblicuángulos? Por ejemplo, por dividir el triángulo dado, en dos triángulos rectángulos. Tal vez la idea no nos resultará bien, pero es razonable, al menos, dibujar el segmento al triángulo, y reflexionar el dibujo de nuevo.

El agregar ese segmento es un buen ejemplo también, de un consejo que viene en el libro *Pensar matemáticamente*:[1] ante cualquier problema que nos dificulta, preguntarse

1. ¿Qué queremos?
2. ¿Qué sabemos?
3. ¿Qué podemos introducir? (Por ejemplo, un segmento).

Bueno, volvamos al tema. Para facilitar la resolución, etiquetemos debidamente, las medidas de varios de los segmentos:



Reflexionando este dibujo, notamos que el triángulo formado por los lados ***h***, **x**, y ***y*** es un triángulo recto, por lo que

$$x^2 = h^2 + y^2 .$$

En el diagrama, se observa que

$$\frac{h}{6} = sen60°$$

luego $h = 6sen60°$.

Se observa también, que

$$\frac{z}{6} = \cos 60°,$$

luego $z = 6\cos 60°$.

Pero se observa también, que

$$h = 6sen60° , \quad y = 8 - z, \ \text{y} \ z = 6cos60°.$$

Entonces, la ecuación $x^2 = h^2 + y^2$ se trasforma en

$$x^2 = (6sen60°)^2 + (8 - z)^2$$
$$= (6sen60°)^2 + (8 - 6cos60°)^2.$$

Con una calculadora, podemos encontrar el valor del lado derecho de esta última, para saber que

$$x^2 = 52 \text{, luego } x = \sqrt{52}, \text{ o sea } x = 2\sqrt{13} .$$

Cuando una idea resulta tan bien como ésta, es aconsejable examinarla más, con fines de identificar otros resultados útiles que pueda darnos.

Primero, volvamos a examinar la ecuación

$$x^2 = (6sen60°)^2 + (8 - 6cos60°)^2.$$

Ante una ecuación tal, que eleva a la cuadrada a cantidades que contienen senos y cosenos de un mismo ángulo, vale la pena buscar la manera de simplificarla por emplear la identidad

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

1. Mason, Burton, y Stacey, *Pensar matemáticamente*, Editorial Anagrama, ISBN 84 335 5139 6.

En este caso, podemos emplearla por desarrollar la cantidad $(8 - 6cos60°)^2$:

$$x^2 = (6sen60°)^2 + (8 - 6cos60°)^2$$
$$= 6^2 sen^2 60° + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos60° + 6^2 cos^2 60°.$$

Ahora, con fines de valernos de la identidad trigonométrica arriba mencionada, reordenamos los términos del lado derecho:

$$x^2 = 6^2 sen^2 60° + 6^2 cos^2 60° + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos60°$$
$$= 6^2(sen^2 60° + cos^2 60°) + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos60° \ .$$

Por lo tanto,

$$x^2 = 6^2 \underbrace{(sen^2 60° + cos^2 60°)}_{1} + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos60°$$

$$= 6^2 \cdot (1) + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos60° \ , \text{ o sea,}$$
$$= 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot cos60° \ .$$

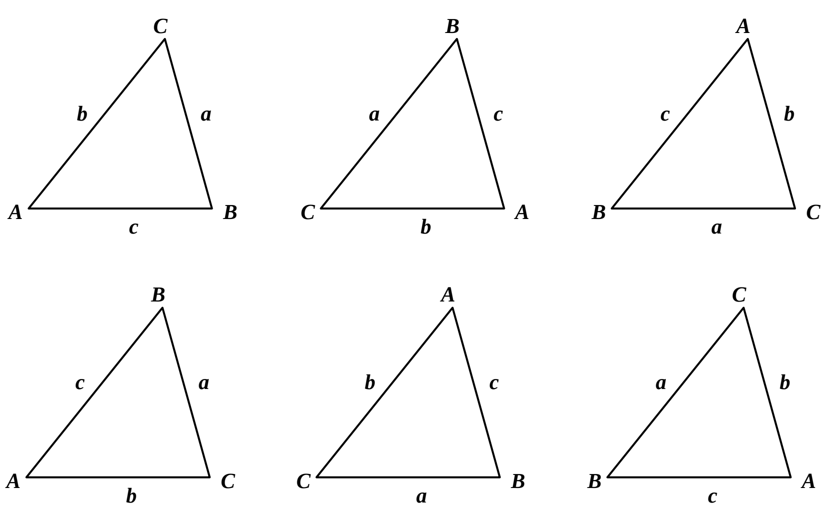
Esta ecuación es un poco más conveniente que la que desarrollamos antes. O sea, que la ecuación

$$x^2 = (6sen60°)^2 + (8 - 6cos60°)^2 \ .$$

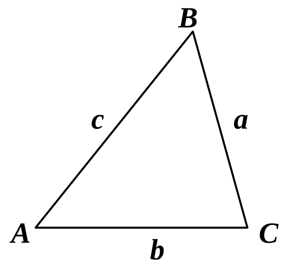
En vista de este logro, deberíamos explorar nuestra idea un poco más. Con frecuencia, es recomendable hacerlo por tratar un triángulo cuyas dimensiones son literales en vez de números específicos. De esta forma, cualquier descubrimiento que resulta, se verificará para todo triángulo. Pero por lo pronto, tendremos que limitarnos a triángulos cuyos ángulos no exceden 90°.

Por lo pronto, imponemos la restricción de que todos los ángulos miden 90° o menos. En otras palabras, que son triángulos ***acutángulos***.

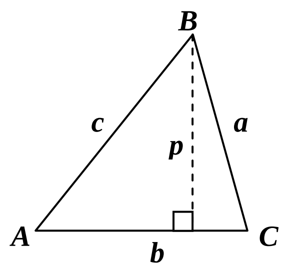
Bueno, ¿cómo poner literales a las medidas de los lados y ángulos? La verdad es que en un triángulo que viene en un problema real, los ángulos y los lados no tienen etiquetas. Podemos etiquetarlos a nuestro antojo. Por ejemplo, aunque respetemos la costumbre de usar letras mayúsculas para los ángulos, y minúsculas para los lados, podemos etiquetar el mismo triángulo de 6 maneras distintas, usando solamente las letras A, B, C, a, b, y c:



De todas estas posibilidades, voy a usar la siguiente para el resto de este capítulo:



Para seguir con nuestra investigación, agregaremos a ese diagrama un segmento vertical que pase por el vértice superior:



Una cosa que podemos notar de inmediato, es que

$$p = c \cdot senA,$$

y también que

$$p = a \cdot senC\ .$$

Por lo tanto,

$$a \cdot senC = c \cdot senA,$$

de manera que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\ , \quad \text{o también,} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}\ .$$

Los primeros resultados importantes de nuestra investigación:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\ ,$$

o también,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}\ .$$

¿Son útiles, estas ecuaciones? ¿Qué tipo de problema podríamos resolver por medio de ellas? Siempre es bueno preguntarnos algo por el estilo al resolver un problema de un tipo nuevo, amén de cuando encontremos una relación que nos parece útil.

La verdad es que sí, estas ecuaciones son útiles. Esto se ve cuando se examinan sus varias versiones “despejadas”. Primero,

$$\operatorname{sen} A = \frac{\mathrm{a} \cdot \operatorname{sen} C}{c}$$

Si nos tocara encontrar el ángulo ***A***, esta fórmula nos permitiría hacerlo, con tal que supiéramos las medidas ***a***, ***c***, y ***C***. Por supuesto que una vez encontrado el valor del sen***A***, tendríamos que usar el arcoseno para encontrar el valor de ***A*** mismo. De manera parecida, podríamos usar la forma despejada

$$\operatorname{sen} C = \frac{\mathrm{c} \cdot \operatorname{sen} A}{a}$$

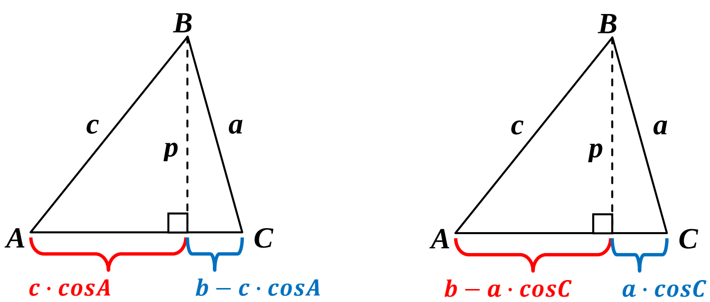
para encontrar el ángulo ***C***, dados los valores de ***a***, ***c***, y ***A***. Semejantes observaciones aplican a las formas despejadas

$$a = \frac{\text{c·sen}\, A}{senC}$$

y

$$c = \frac{\text{a·sen}\, C}{senA} \; .$$

Ahora, agreguemos unos cuantos datos más al dibujo anterior. La base mide ***b***, y las medidas de sus partes a la derecha y de la izquierda del segmento vertical pueden escribirse de dos formas, ambas en función de los dos ángulos de base:



Sabemos además, que

$p = c \cdot senA$, y también, $p = a \cdot senC$.

Juguemos un poco con esta información. Con base en el teorema de Pitágoras, podemos escribir dos ecuaciones distintas para ***a***^{2}:

$$a^2 = p^2 + (\boldsymbol{b - c \cdot cosA})^2 \,, \quad \text{y} \quad a^2 = p^2 + (\boldsymbol{a \cdot cosC})^2.$$

Pero sabemos dos expresiones para ***p*** también; a saber,

$$p = c \cdot senA, \quad \text{y} \quad p = a \cdot senC \; .$$

Entonces, en total, con base en el teorema de Pitágoras, podemos escribir cuatro ecuaciones para ***a***^{2}:

I. $a^2 = (c \cdot senA)^2 + (b - c \cdot cosA)^2$

II. $a^2 = (a \cdot senC)^2 + (b - c \cdot cosA)^2$

III. $a^2 = (c \cdot senA)^2 + (a \cdot cosC)^2$

IV. $a^2 = (a \cdot senC)^2 + (a \cdot cosC)^2$

Tratémoslas una por una.

Partiendo de la primera, encontramos que

$$\begin{aligned} a^2 &= (c \cdot senA)^2 + (b - c \cdot cosA)^2 \\ &= c^2 sen^2 A + b^2 - 2bc(cosA) + c^2 cos^2 A \\ &= c^2 (sen^2 A + cos^2 A) + b^2 - 2bc(cosA) \end{aligned}$$

$$= c^2 + b^2 - 2bc(cosA)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc(cosA).$$

Es decir,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA).$$

Partiendo de
$$a^2 = (c \cdot senA)^2 + (b - c \cdot cosA)^2$$
Se obtiene
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$$

¿Es útil? Examinemos sus formas despejadas:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc(cosA)}.$$

Ésta nos permite encontrar ***a***, dadas las medidas ***b***, ***c***, y ***A***. Y si despejamos al cosa, encontramos que

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \ .$$

Por medio de ésa, podemos encontrar ***A***, dadas las medidas ***a***, ***b***, y ***c***. (Encontrado el valor del sen***A***, se emplea el arco coseno para encontrar ***A*** mismo. Por fin, tenemos las formas despejadas

$$b = c \cdot cosA \pm \sqrt{a^2 - c^2sen^2A}$$

y

$$c = b \cdot cosA \pm \sqrt{a^2 - b^2sen^2A} \,.$$

Estas últimas son interesantes, ya que el "±" nos sugiere que ciertas combinaciones de ***a***, ***c***, y ***A*** permiten más de un solo valor de ***b***, y que ciertas combinaciones de ***a***, ***b***, y ***A*** permiten más de un solo valor de ***c***. Platicaremos estas observaciones en algún otro momento.

Ahora, tratemos la segunda ecuación para $\boldsymbol{a^2}$:

$$a^2 = (a \cdot senC)^2 + (b - c \cdot cosA)^2$$
$$= a^2sen^2C + b^2 - 2bc(cosA) + c^2cos^2A \ ,$$

La que para mí, no es muy llamativa. La tercera nos dice que

$$a^2 = (c \cdot senA)^2 + (a \cdot cosC)^2$$
$$= c^2sen^2A + a^2cos^2C \ ,$$

luego

$$a^2 - a^2cos^2C = c^2sen^2A \ ,$$
$$a^2 \cdot 1 - a^2 \cdot cos^2C = c^2sen^2A \ ,$$
$$a^2(1 - cos^2C) = c^2sen^2A \ ,$$
$$a^2sen^2C = c^2sen^2A$$
$$\sqrt{a^2sen^2C} = \sqrt{c^2sen^2A} \ ,$$
$$a \cdot senC = c \cdot senA \ ,$$
$$\frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} \ ,$$
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \ ,$$

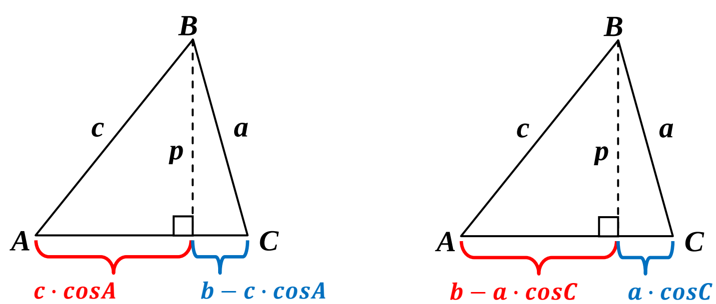
Un resultado que ya la habíamos obtenido de otra forma.

Por fin, la cuarta ecuación nos dice que

$$\begin{aligned} a^2 &= (a \cdot senC)^2 + (a \cdot cosC)^2 \\ &= a^2 sen^2 C + a^2 cos^2 C, \\ &= a^2(\mathrm{sen}^2\mathrm{C} + \cos^2\mathrm{C}) \\ &= a^2(1) \\ &= \mathrm{a}^2 \ . \end{aligned}$$

Luego ¡ $a^2 = a^2$!

Partiendo de la misma información que usamos para desarrollar ecuaciones que tratan $\boldsymbol{a}^2$, podemos escribir ecuaciones para $\boldsymbol{c}^2$. "Jugaremos" con ellas con fines de encontrar otras relaciones entre los ángulos y lados. Para la conveniencia del lector, presento de nuevo el diagrama previo.



Sabemos además, que

$p = c \cdot senA$, y también, $p = a \cdot senC$.

Con base en el teorema de Pitágoras, podemos escribir dos ecuaciones distintas para $\boldsymbol{c}^2$:

$$c^2 = p^2 + (\boldsymbol{c \cdot cosA})^2 \ , \quad \text{y} \quad c^2 = p^2 + (\boldsymbol{b - a \cdot cosC})^2.$$

Otra vez, para $\boldsymbol{p}$ tenemos las dos expresiones

$$p = c \cdot senA, \quad \text{y} \quad p = a \cdot senC \ .$$

Entonces, en total, con base en el teorema de Pitágoras, podemos escribir cuatro ecuaciones para $\boldsymbol{c}^2$:

V. $c^2 = (c \cdot senA)^2 + (c \cdot cosA)^2$

VI. $c^2 = (a \cdot senC)^2 + (c \cdot cosA)^2$

VII. $c^2 = (c \cdot senA)^2 + (b - a \cdot cosC)^2$

VIII. $c^2 = (a \cdot senC)^2 + (b - a \cdot cosC)^2$

¿Puedes ver que la ecuación V nos llevará a $c^2 = c^2$, exactamente como la ecuación

$$a^2 = (a \cdot senC)^2 + (a \cdot cosC)^2$$

nos llevó a $c^2 = c^2$? Y ¿puedes ver también, que la ecuación VI nos llevará a

$$csenA = asenC,$$

y por fin a

$$\frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} ,$$

exactamente como lo hizo la ecuación

$$a^2 = (c \cdot senA)^2 + (a \cdot cosC)^2 \text{ ?}$$

La ecuación VI,

$$c^2 = (c \cdot senA)^2 + (b - a \cdot cosC)^2 ,$$

al igual que su semejante que examinamos antes,

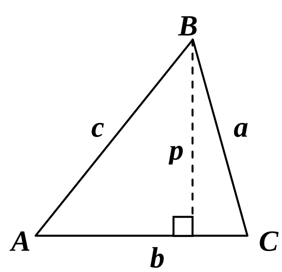
$$a^2 = (a \cdot senC)^2 + (b - c \cdot cosA)^2 ,$$

no resulta útil. Pero sí, la ecuación VIII:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cdot senC)^2 + (b - a \cdot cosC)^2 \\ &= a^2 sen^2 C + b^2 - 2ab(cosC) + a^2 cos^2 C \\ &= a^2(sen^2 C + cos^2 C) + b^2 - 2ab(cosC) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab(cosC) . \end{aligned}$$

Partiendo de
$c^2 = (a \cdot senC)^2 + (b - a \cdot cosC)^2$
Se obtiene
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$

En resumen: a esas alturas, y partiendo del diagrama



hemos encontrado tres verdades (he omitido las repeticiones, y aquellas verdades que no parecen útiles):

Las tres verdades identificadas hasta el momento.

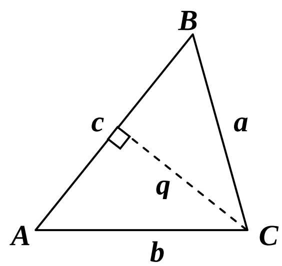
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} .$$

Ya que esa investigación dio fruto, ¿qué tal si hacemos una parecida, sobre el mismo triángulo, pero con un segmento perpendicular al lado ***c***, que pasa por el vértice ***C***?

Si puedes ver que no es necesario hacer los mismos pasos para cada uno de los tres lados, ¡qué bueno! Pero me veo obligado a presentar el análisis completo.



De inmediato, notamos que

$$q = b \cdot senA,$$

y también que

$$q = a \cdot senB \ .$$

Por lo tanto,

$$b \cdot senA = a \cdot senB,$$

de manera que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}\ , \quad \text{o también,} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}\ .$$

En la investigación sobre el dibujo anterior, notamos que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\ , \quad \text{o también,} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}\ .$$

Ahora, sabemos que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

y

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\ .$$

Por la propiedad transitiva de la igualdad, ya que $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$ y $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$, se verifica también que $\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$.

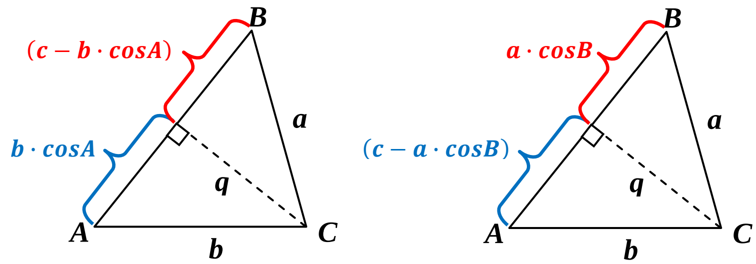
El idioma de las matemáticas nos permite comunicar estas tres verdades en la forma de una sola ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\ .$$

Por supuesto, ésta quiere decir también, que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}\ .$$

Ahora, agregamos a nuestro dibujo los datos que tenemos sobre ***q*** y las dos partes del lado ***c***:



Sabemos además, que

$q = b \cdot senA$, y también, $q = a \cdot senB$.

Partiendo de estos datos, desarrollemos ecuaciones para $\boldsymbol{a^2}$ y $\boldsymbol{b^2}$. Como fue el caso en la investigación anterior, podemos escribir cuatro ecuaciones para cada una, las cuales las simplificaremos después:

"$b \cdot senA$" y "$a \cdot senB$" son expresiones para $\boldsymbol{q}$.

Ecuaciones para $\boldsymbol{a^2}$	**Ecuaciones para $\boldsymbol{b^2}$**
$a^2 = (b \cdot senA)^2 + (\boldsymbol{c - b \cdot cosA})^2$	$b^2 = (b \cdot senA)^2 + (\boldsymbol{b \cdot cosA})^2$
$a^2 = (b \cdot senA)^2 + (\boldsymbol{a \cdot cosB})^2$	$b^2 = (b \cdot senA)^2 + (\boldsymbol{c - a \cdot cosB})^2$
$a^2 = (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{c - b \cdot cosA})^2$	$b^2 = (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{b \cdot cosA})^2$
$a^2 = (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{a \cdot cosB})^2$	$b^2 = (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{c - a \cdot cosB})^2$

Es aconsejable trabajar con las otras ecuaciones para asegurarse de que ellas se reducen a la una o la otra de las siguientes formas

$a^2 = a^2$

$b^2 = b^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$

$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b}$.

Para no alargar demasiado la lección, menciono que solamente la ecuación

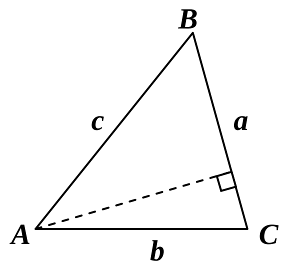
$$b^2 = (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{c - a \cdot cosB})^2$$

nos lleva a una verdad nueva:

$$\begin{aligned} b^2 &= (a \cdot senB)^2 + (\boldsymbol{c - a \cdot cosB})^2 \\ &= a^2 sen^2 B + c^2 - 2ac(cosB) + a^2 cos^2 B \\ &= a^2(sen^2 B + cos^2 B) + c^2 - 2ac(cosB) \\ &= a^2 + c^2 - 2ac(cosB)\ . \end{aligned}$$

Luego $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$.

Resulta que no encontraríamos nada de nuevo tampoco, si agregáramos a nuestro triángulo un segmento perpendicular al lado ***a***:



Entonces, ya podemos presentar un listado completo de las verdades que hemos identificado. Lo haremos a continuación.

Lo que ha resultado de nuestra exploración

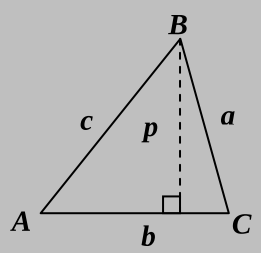
Enfatizo que al desarrollar estas ecuaciones, solo supusimos que todos los ángulos miden menos que 90°, por lo que estas ecuaciones se verifican para ***todo*** triángulo tal.

Verdades para todo triángulo que todos sus ángulos son menores de 90°	
Verdades que tratan del coseno	**Verdades que tratan del seno**
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$	$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$	$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$	$\dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$
	O sea, $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$.

Más al rato, veremos que estas ecuaciones se verifican para todos los triángulos. Pero hasta este momento, las hemos demostrado solamente para triángulos acutángulos.

Para facilitar la comunicación cuando platicamos de estas verdades, pongámoslas sus nombres de usuales:

El área del triángulo en el diagrama que hemos estado usando,



es

$$\acute{A}rea = \frac{pb}{2}$$
$$= \frac{(c \cdot \operatorname{sen} A) \cdot b}{2}.$$

Por lo tanto,

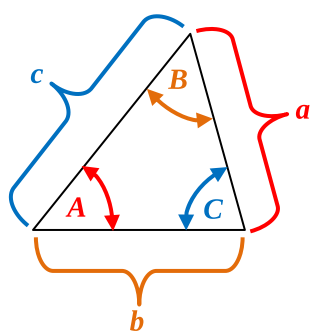
$$\operatorname{sen} A = \frac{2 \cdot \acute{A}rea}{bc},$$

luego

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{2 \cdot \acute{A}rea}{abc}.$$

La ley de los cosenos	**La ley de los senos**
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$ Es decir, $\begin{pmatrix}\text{La medida del} \\ \text{lado opuesto} \\ \text{al ángulo}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\text{La medida de} \\ \text{uno de los} \\ \text{lados adyacentes}\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}\text{La medida del} \\ \text{otro lado} \\ \text{adyacentes}\end{pmatrix}^2 - (2)\begin{pmatrix}\text{El producto} \\ \text{de las medidas} \\ \text{de los adyacentes}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{El coseno} \\ \text{del ángulo}\end{pmatrix}$	$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$ Es decir, en cualquier triángulo dado, la siguiente razón es igual para todos los tres ángulos: $\frac{\begin{pmatrix}\text{El largo del lado} \\ \text{opuesto al ángulo}\end{pmatrix}}{\text{El seno del ángulo}}.$ Se puede demostrar (véase la nota al margen) que este razón es igual a $\frac{2 \cdot \text{El área del triángulo}}{abc}.$

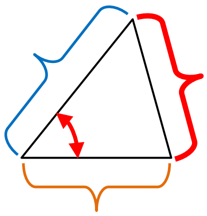
Para presentar de forma más “visual” estas verdades, se presenta este diagrama



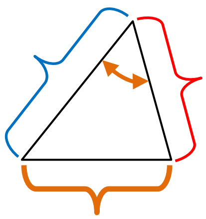
según el cual la Ley de Los Cosenos nos dice lo siguiente:

En cada una de estas ecuaciones intervienen cuatro medidas: los tres lados, y uno de los ángulos.

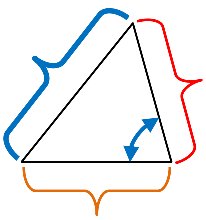
O si prefieres pensarlo de otra forma, las cuatro cantidades son la medida del ángulo, la medida de su ángulo opuesto, y las medidas de los otros dos lados.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$$

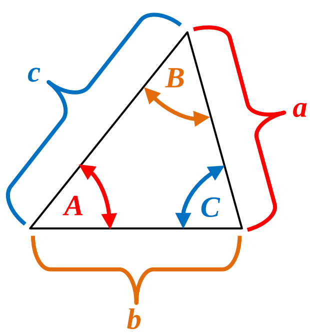


$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(\cos B)$$

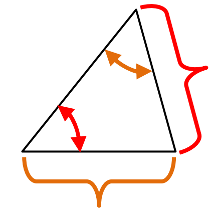


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)\ .$$

Con referencia al mismo diagrama; o sea, el siguiente,

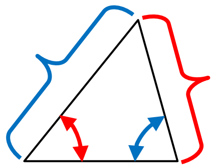


la Ley de Los Senos nos dice que

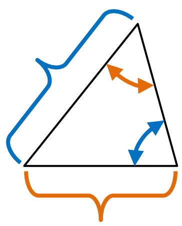


$$\frac{\text{sen}\,\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\text{sen}\,\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}}$$

Al igual que en las ecuaciones para la Ley de Los Cosenos, intervienen cuatro medidas en éstas también. Pero a diferencia del caso de la Ley de los Cosenos, las cantidades consisten en dos lados emparentados con sus respectivos ángulos opuestos.



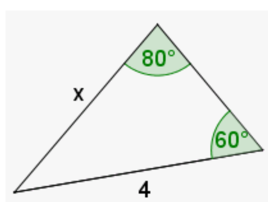
$$\frac{\text{sen}\,\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\text{sen}\,\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{c}}$$



$$\frac{\text{sen}\,\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\text{sen}\,\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{c}}$$

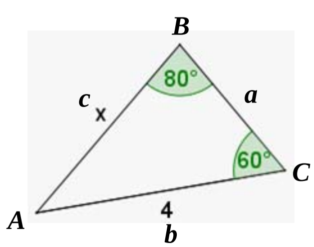
Unos cuantos ejemplos

1. Encontrar ***x***.



Primero, etiquetamos las medidas:

¿Es éste un triángulo acutángulo? Sí, lo es: Los ángulos ***B*** y ***C*** miden menos que 90°, y ya que la suma de las medidas de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, ***A*** mide 40°.



a = ¿?	***A*** = ¿?
b = 4	***B*** = 80°
c = ***x***	***C*** = 60°

Ahora, examinemos las verdades que tratan el coseno (es decir, las fórmulas para la Ley de Los Cosenos), sustituyendo los datos que tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$, o sea, $a^2 = 4^2 + \boldsymbol{x}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \boldsymbol{x} \cdot (cosA)$

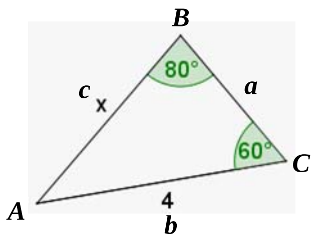
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$, o sea, $4^2 = a^2 + \boldsymbol{x}^2 - 2 \cdot a \cdot \boldsymbol{x} \cdot (cos80°)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$, o sea, $\boldsymbol{x}^2 = a^2 + 4^2 - 2 \cdot a \cdot 4 \cdot (cos60°)$.

Ya que las verdades que tratan el coseno se verifican para <u>todo</u> triángulo (nota al margen, p. 2), se verifican para el nuestro. Pero, ¡esto no dice que siempre podemos usarlas con provecho! Para poder encontrar el valor de una incógnita a partir de una sola ecuación, es necesario que sea la única incógnita en la ecuación. Y esta condición no se cumple en ninguna de las ecuaciones que acabamos de escribir. Además de la ***x***, todas contienen o el ángulo ***A***, o el lado ***a***.

No se puede encontrar el valor de una incógnita por despejarla en una sola ecuación, a menos que sea la <u>única</u> incógnita en la ecuación.

La Ley de Los Cosenos no nos ayudó, por lo que reflexionamos sobre lo que nos dice la de los Senos:



a = ¿?	***A*** = ¿?
b = 4	***B*** = 80°
c = ***x***	***C*** = 60°

$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$, luego $\frac{a}{senA} = \frac{4}{sen80°}$

$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$, luego $\frac{a}{senA} = \frac{x}{sen80°}$

$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$, luego $\frac{4}{sen80°} = \frac{x}{sen60°}$

En este caso, sí, hay una ecuación en que ***x*** es la única incógnita:

$$\frac{4}{sen80°} = \frac{x}{sen60°} .$$

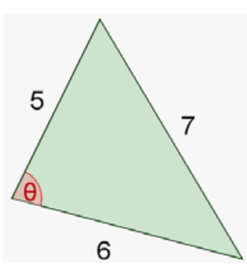
Para despejar al ***x***, se deshace la división por el sen60°:

$$sen60° \cdot \frac{4}{sen80°} = \frac{x}{sen60°} \cdot sen60° ,$$

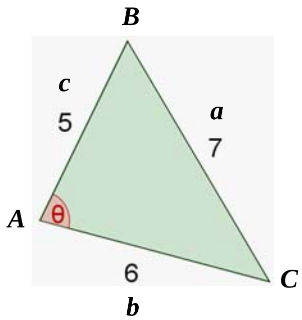
$$x = sen60° \cdot \frac{4}{sen80°} ,$$

la cual es 3.52, para dar una respuesta con una precisión de 3 cifras.

2. Encontrar ***θ***.



Primero, etiquetamos las medidas:



a = 7	***A*** = $\boldsymbol{\theta}$
b = 6	***B*** = ¿?
c = 5	***C*** = ¿?

Como lo hicimos en el ejemplo anterior, examinemos las verdades que conocemos. Ya que la Ley de los Senos funcionó en aquel el ejemplo anterior, la probamos primero:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}\,,\ \text{luego}\ \frac{7}{sen\boldsymbol{\theta}} = \frac{6}{sen\mathrm{B}}$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}\,,\ \text{luego}\ \frac{7}{sen\boldsymbol{\theta}} = \frac{5}{sen\mathrm{C}}$$

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}\,,\ \text{luego}\ \frac{6}{senB} = \frac{5}{sen\mathrm{C}}$$

OTRA VEZ
No se puede encontrar el valor de una incógnita por despejarla en una sola ecuación, a menos que sea la <u>única</u> incógnita en la ecuación.

Las verdades que tratan el seno se verifican para todo triángulo, por lo que se verifican para el nuestro. Pero en este caso, no podemos usarlas con provecho, porque no nos dan ninguna ecuación en la que $\boldsymbol{\theta}$ sea la única incógnita. Entonces, examinemos las verdades que tratan el coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA),\ \text{o sea,}\ 7^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot(cos\boldsymbol{\theta})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB),\ \text{o sea,}\ 6^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot(cosB)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC),\ \text{o sea,}\ 5^2 = 7^2 + 6^2 - 2\cdot 7\cdot 6\cdot(cosC°).$$

La primera ecuación, es decir, la

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot(cos\boldsymbol{\theta})\ ,$$

sí, nos sirve. ¿Cómo despejar al $\boldsymbol{\theta}$? A ver:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot(cos\boldsymbol{\theta})$$

$$6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot(cos\boldsymbol{\theta}) = 7^2\ ,$$

$$36 + 25 - 60\cdot(cos\boldsymbol{\theta}) = 49\ ,$$

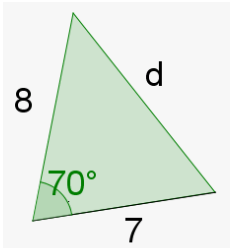
$$cos\boldsymbol{\theta} = \frac{49-36-25}{-60}\ ,$$

$$cos\boldsymbol{\theta} = 0.2\ ,$$

$$\cos^{-1}(cos\boldsymbol{\theta}) = \cos^{-1}(0.2)\ ,$$

$$\boldsymbol{\theta} = 78.5°\ .$$

3. Encontrar ***d***.



Esta vez, no voy a escribir todas las "verdades". ¿Puedes ver que éste es un caso donde podemos usar la Ley de Los Cosenos?

$$d^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 70°$$

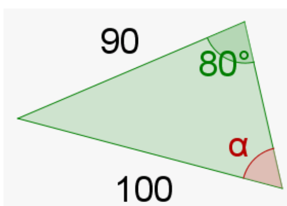
$$d^2 = 113 - 112 \cdot 0.34202$$

$$d^2 = 74.69374$$

$$\sqrt{d^2} = \sqrt{74.69374}$$

$$d = 8.64 \ .$$

4. Encontrar ***α***.



A diferencia del problema anterior, éste se resuelve por medio de la Ley de Los Senos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{90} = \frac{\operatorname{sen} 80°}{100} \ ,$$

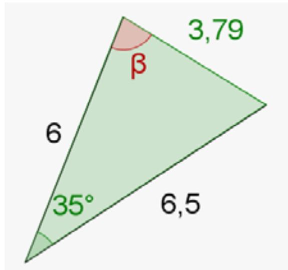
$$90 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{90} = 90 \cdot \frac{\operatorname{sen} 80°}{100} \ ,$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 90 \cdot \frac{\operatorname{sen} 80°}{100} = 0.886327$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \alpha) = \operatorname{sen}^{-1}(0.886327)$$

$$\alpha = 62.4° \ .$$

5. Encontrar β.



En este caso, tenemos los datos necesarios para encontrar β a través de la Ley de Los Senos, al igual que por medio de la Ley de Los Cosenos.

Por medio de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{6.5} = \frac{\operatorname{sen}35°}{3.79}\,,$$

$$\operatorname{sen}\beta = 6.5\cdot\frac{\operatorname{sen}35°}{3.79} = 0.983706\,,$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(0.983706) = 79.6°\,.$$

Por medio de los cosenos:

Una duda que aclarar, en cuanto a la diferencia entre los dos resultados para β.

$$6.5^2 = 6^2 + 3.79^2 - 2\cdot 6\cdot 3.79\cdot\cos\beta\,,$$

$$\cos\beta = \frac{6.5^2-6^2-3.79^2}{-2\cdot 6\cdot 3.79} = 0.17841\,,$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.17841) = 79.7°\,.$$

Es notable que los dos valores de β (el calculado por medio de la Ley de Los Seno, y el calculado por medio de la Ley de Los Senos) no coincidan exactamente. Deberíamos saber por qué—puede que las dos Leyes sean inconsistentes.

Primero, examinemos los datos, para detectar cualquiera inconsistencia que haya. Por ejemplo, calculemos cuál debe ser el largo del lado opuesto al ángulo que mide 35°. Si la medida de este ángulo es exactamente 35, y si los otros dos lados miden exactamente 6 y 6.5 respectivamente, entonces

$$(Largo\ del\ lado\ opuesto)^2 = 6^2 + 6.5^2 - 2\cdot 6\cdot 6.5\cdot\cos 35°$$

$$= 14.3561405455\,,$$

$$\therefore Largo = \sqrt{14.3561405455}\,,$$

la cual es 3.78894979453, para dar una respuesta con una precisión de 12 cifras. Entonces, si los otros dos lados miden exactamente 6 y 6.5 respectivamente, y forman un ángulo de exactamente 35°, entonces el otro lado no puede medir exactamente 3.79.

Es más, y en cambio, si los tres lados miden exactamente 3.79, 6, 7 6.5 respectivamente, entonces el ángulo opuesto al lado que mide 3.79, no puede medir exactamente 35°. Si a este ángulo lo llamamos $\boldsymbol{A}$, la Ley de Los Cosenos nos dice que

$$\cos A = \frac{3.79^2-6.5^2-6^2}{-2\cdot 6\cdot 6.5} = 0.81905$$

$A = \cos^{-1}(0.81905) = 35.0101921281°$, en vez de 35°.

¿Puede que diferencias tan pequeñas como éstas causaron la diferencia entre los valores de β que notamos? Para saberlo, calculemos β de nuevo, usando el valor 3.78894979453 en vez de 3.79, pero suponiendo que son exactos los valores 35°, 6, y 6.5:

Por medio de los senos:

$$\operatorname{sen}\beta = 6.5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35°}{3.78894979453} = 0.983978948907\,,$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(0.983978948907) = 79.7301366549°\,.$$

Por medio de los cosenos:

$$\cos\beta = \frac{6.5^2 - 6^2 - 3.78894979453^2}{-2 \cdot 6 \cdot 3.78894979453} = 0.178284682763\,,$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.178284682763) = 79.7301366549°\,.$$

Los valores de β ya coinciden, con una precisión de 12 cifras.

En cambio, ahora calculemos β de nuevo, suponiendo que son exactos los largos de los lados (3.79, 6, y 6.5), pero usando 35.0101921281° en vez de 35°:

Por medio de los senos:

$$\operatorname{sen}\beta = 6.5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 35.0101921281°}{3.79} = 0.983956182123\,,$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(0.983956182123) = 79.7228226149°\,.$$

Por medio de los cosenos:

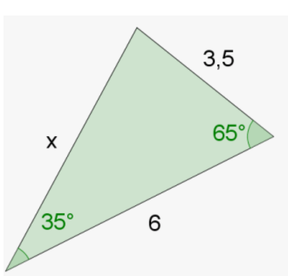
$$\cos\beta = \frac{6.5^2 - 6^2 - 3.79^2}{-2 \cdot 6 \cdot 3.79} = 0.178410290237\,,$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.178410290237) = 79.7228226149°\,.$$

De nuevo, los valores de β coinciden, pero no son iguales a aquellos que calculamos partiendo de la suposición de que el "35°" es exacta.

De hecho, toda medida real tiene cierto grado de imprecisión, por lo que cualquier cálculo hecho con base en dichas medidas tiene cierto grado de imprecisión también. En el caso presente, la imprecisión en la medida "3.79" imposibilita que calculemos el valor de β con una precisión de 3 cifras. La imprecisión en la medida "35°" influye de forma semejante en el cálculo de la longitud de su lado opuesto.

6. Encontrar $\boldsymbol{x}$.



De nuevo, podemos encontrarlo o por medio de la Ley de Los Senos, o la Ley de Los Cosenos.

Por medio de los senos:

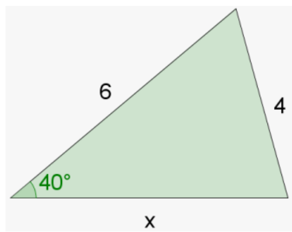
$$\frac{x}{\text{sen }65°} = \frac{3.5}{\text{sen }35°}\ ,\ \therefore\ x = \text{sen }65° \cdot \frac{3.5}{\text{sen }35°} = 5.53\ .$$

Por medio de los senos:

$$x = \sqrt{6^2 + 3.5^2 - 2\cdot 6\cdot 3.5\cdot \cos 65°} = 5.52\ .$$

Otra vez, los dos cálculos dan respuestas distintas, a causa de la imprecisión de los datos.

7. Encontrar ***x***.



La fórmula cuadrática
La ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene dos respuestas

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

El idioma de las matemáticas cuenta con el símbolo "±" para permitirnos comunicar por medio de una sola ecuación, el hecho de que existen dos soluciones:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

Según la Ley de Los Cosenos,

$$4^2 = 6^2 + x^2 - 2\cdot 6\cdot x\cdot \cos 40°\ .$$

Ésta es, en verdad, una ecuación cuadrática, como lo veremos si la reordenamos:

$$x^2 - 2\cdot 6\cdot x\cdot \cos 40° + 6^2 - 4^2 = 0\ .$$

Para hacerla coincidir con la forma estándar de una ecuación cuadrática, la escribimos como

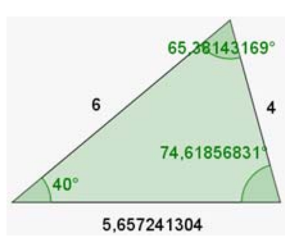
$$1\cdot x^2 + (-2\cdot 6\cdot \cos 40°)\cdot x + (6^2 - 4^2) = 0\ .$$

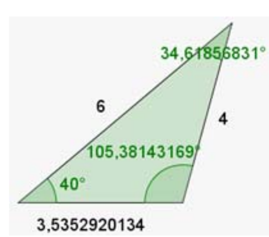
Por lo tanto, según la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-2\cdot 6\cdot \cos 40°)\pm\sqrt{(-2\cdot 6\cdot \cos 40°)^2 - 4\cdot 1\cdot (6^2-4^2)}}{2\cdot 1}$$

= 3.5352920134 o 5.65724130403.

Entonces, la Ley de Los Cosenos nos dice que pueden existir dos triángulos en los que un ángulo de 40° es adyacente a un lado que mide 6, y opuesto a un lado que mide 4. Por medio de los llamados programas de la geometría dinámica, podemos averiguar —y fácilmente— si ambos triángulos realmente existen. Resulta que sí:





Por la existencia de dos triángulos consistentes con los datos, este es un ejemplo de los llamados ***casos ambiguos***.

Luego o temprano, queremos identificar cómo resolver triángulos obtusángulos; o sea, aquellos que tienen un ángulo que mide más de 90°. Es notable que un triángulo tal, sea una de las dos soluciones para este problema. Entonces, es probable que valga la pena investigar sobre estos triángulos. Sobre todo, deberíamos investigar sobre cómo tendrían que ser los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de sus respectivas esquinas inferiores derechas.

Según la Ley de Los Senos,

$$\overbrace{\frac{\operatorname{sen} 74.61856831°}{6} = \frac{\operatorname{sen} 40°}{4}}^{Triángulo\ a\ la\ izquierda}, \quad \text{y} \quad \overbrace{\frac{\operatorname{sen} 105.38143169°}{6} = \frac{\operatorname{sen} 40°}{4}}^{Triángulo\ a\ la\ derecha}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen} 74.61856831° = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 40°}{4}$,

y $\operatorname{sen} 105.38143169° = 6 \cdot \frac{\operatorname{sen} 40°}{4}$ también. Es decir,

$$\operatorname{sen} 74.61856831° = \operatorname{sen} 105.38143169° \ .$$

En cambio, la Ley de Los Cosenos nos dice que

$$\overbrace{6^2 = 5.65724130403^2 + 4^2 - 2 \cdot 5.65724130403 \cdot 4 \cdot \cos 74.61856831°}^{Triángulo\ a\ la\ izquierda}, \quad \text{y}$$

$$\overbrace{6^2 = 3.5352920134^2 + 4^2 - 2 \cdot 3.5352920134 \cdot 4 \cdot \cos 105.38143169°}^{Triángulo\ a\ la\ derecha}.$$

Podemos despejar al $\cos(74.61856831°)$ y al $\cos(105.38143169°)$ para saber que

$$\cos(74.61856831°) = 0.265243661329 \ ,$$

y $\cos(105.38143169°) = -0.265243661328°$.

Entonces, a juzgar por este ejemplo, los cosenos de los dos ángulos tendrían que iguales en cuanto a sus magnitudes, pero de signos contrarios, mientras sus senos tendrían que iguales.

Es interesante esa diferencia. Entonces, deberíamos investigarla más profundamente.

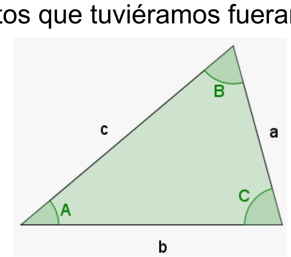
Para que la Ley de los Senos y la Ley de Los Cosenos se verifiquen parea triángulos obtusángulos, ¿cómo tendrían que ser los valores del seno y del coseno para ´los ángulos obtusos?

Volveremos a este tema más al rato.

Una investigación sobre los casos “ambiguos”

Para que los resultados de nuestra investigación tengan la mayor aplicación posible, partimos de un diagrama de un triángulo hipotético cuyas medidas son dadas por medio de literales.

Investiguemos sobre qué pasaría si ***b*** fuera una incógnita, y si los únicos datos que tuviéramos fueran ***a***, ***c***, y ***A***. Por la Ley de Los Cosenos,



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \ .$$

Entonces, despejemos al ***b***:

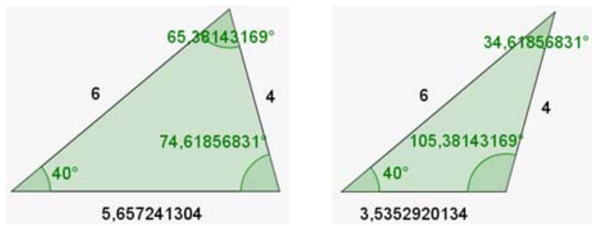
$$1 \cdot b^2 + (-2 \cdot c \cdot \cos A) \cdot b + (c^2 - a^2) = 0 \ , \quad \text{y}$$

¿Por qué digo que éste es nuestro triángulo “hipotético”?

Porque no sabemos cómo es su forma, en verdad. Tenemos que mantenernos dispuestos para modificarlo a la luz de los resultados que se obtengan en el curso de nuestra investigación.

$$b = \frac{-(-2 \cdot c \cdot \cos A) \pm \sqrt{(-2 \cdot c \cdot \cos A)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c^2 - a^2)}}{2 \cdot 1}\ .$$

Este resultado implica que son posibles dos valores de ***b***. O sea, que pueden existir dos triángulos con los mismos ***a***, ***c***, y ***A***. Entonces, este resultado cuadra con lo que observamos al trabajar con luego estos dos triángulos:



Pero, ¿qué tal si simplificamos nuestro resultado antes de reflexionarlo?

$$b = \frac{-(-2 \cdot c \cdot \cos A) \pm \sqrt{(-2 \cdot c \cdot \cos A)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c^2 - a^2)}}{2 \cdot 1}\ .$$

$$b = \frac{2 \cdot c \cdot \cos A \pm \sqrt{4 \cdot c^2 \cdot \cos^2 A - 4 \cdot c^2 + 4 \cdot a^2}}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot c \cdot \cos A \pm 2\sqrt{c^2 \cdot \cos^2 A - c^2 + a^2}}{2}$$

$$= c \cdot \cos A \pm \sqrt{c^2 \cdot \cos^2 A - c^2 + a^2}$$

$$= c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cdot (1 - \cos^2 A)}$$

$$= c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \operatorname{sen}^2 A}\ \text{, luego}$$

$$b = c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - (c \cdot \operatorname{sen} A)^2}\ .\ ⇦⇦$$

Esta maniobra nos permite emplear una variante de la identidad

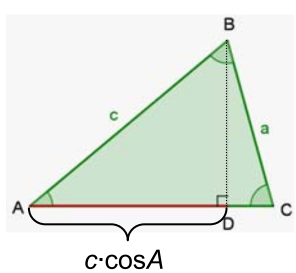
$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Concretamente,

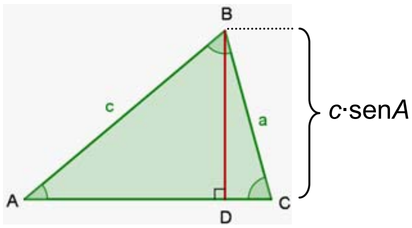
$1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$.

Bueno, no siempre es indicado, el simplificar una ecuación en esta medida. A veces, la forma **no** simplificada arroja más luz sobre los papeles de las varias cantidades que intervienen en un problema. Pero si la forma simplificada no nos ayuda, contaremos con la opción de dar marcha atrás. ¿Resultará así en este caso? A ver.

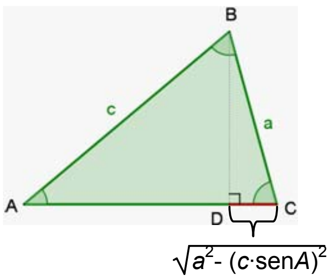
Ante una expresión tal, es indicado averiguar si las cantidades que vienen en la fórmula corresponden claramente a segmentos en la figura. Por ejemplo, ¿existe un segmento con la longitud "$c \cdot \cos A$"? Resulta que sí: es el segmento rojo.



Y la cantidad “*c*·sen*A*” no es nada más que la longitud del segmento BD:



La cantidad “$\sqrt{a^2 - (c\cdot \text{sen}A)^2}$ nos cuesta más trabajo. Podemos identificar ***a*** con el segmento *BC*, y acabamos de identificar “*c*·sen*A*” con el segmento BD. Se nota que *BC* y *BD* son, respectivamente, la hipotenusa y un cateto del triángulo rectángulo BDC. Entonces, según el Teorema de Pitágoras, “$\sqrt{a^2 - (c\cdot \text{sen}A)^2}$” es la longitud del otro cateto. A saber, del segmento *CD*.



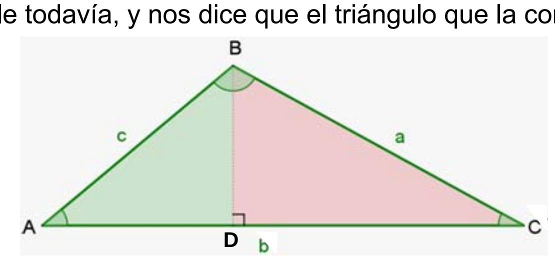
Con base en esas observaciones sobre los segmentos que corresponden a las cantidades en la ecuación

$$b = c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - (c \cdot \text{sen}\, A)^2}\ \ ,$$

ya entendemos por qué, en algunos caso, pueden existir dos triángulos distintos que tienen las mismas medidas ***a***, ***c***, y ***A***. Pero notamos también, que cuando $\sqrt{a^2 - (c\cdot \text{sen}A)^2} > c\cdot\cos A$, no existen dos triángulos tales, sino uno. Esto porque en este caso, el segmento *DC* es más largo que *AD*. La solución

$$b = c \cdot \cos A + \sqrt{a^2 - (c \cdot \text{sen}\, A)^2}$$

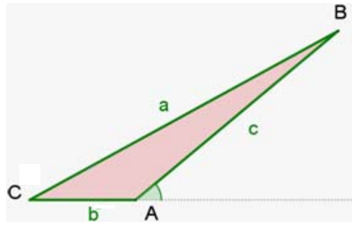
vale todavía, y nos dice que el triángulo que la corresponde es así:



En contraste, la solución

$$b = c \cdot \cos A - \sqrt{a^2 - (c \cdot \text{sen}\, A)^2}$$

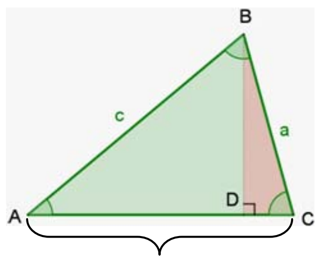
nos da un valor negativo para ***b***. Esto, en sí, no justifica descartarla. A veces, un signo negativo nos comunica información importante. Pero en este caso, se descarta el valor negativo de ***b*** porque implica una contradicción. Concretamente, implica que el punto ***C*** se encuentra a la izquierda de ***A*** en vez de a la derecha,



por lo que el ángulo ***CAB*** no tiene la medida dada en el enunciado del problema. Es decir, no tiene la misma medida “verde”. Entonces, un valor negativo de ***b*** no puede ser una solución para el problema dado.

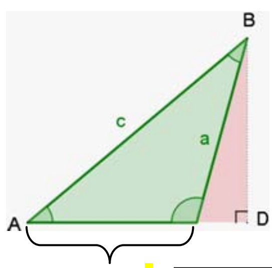
Buenos, volviendo al caso donde $c{\cdot}\cos A$ es menor que $\sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$, sí existen dos triángulos. Es más, existe una relación bonita entre estos dos, y los triángulos rectángulos en los que dividimos el triángulo hipotético *ABC*.

Concretamente, el triángulo cuya base ***b*** mide $c{\cdot}\cos A + \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$, es el triángulo rectángulo *ADB* con el triángulo *BDC* agregado.



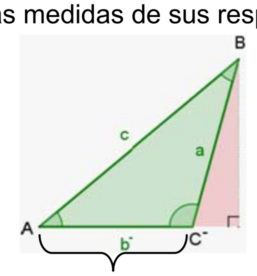
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}{\cdot}\cos A + \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$

Entonces, la forma de este triángulo sí, coincide con la del “hipotético”. En cambio, el triángulo cuya base mide $c{\cdot}\cos A + \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$ es el triángulo rectángulo *ADB* con el triángulo *BDC* “restado”:

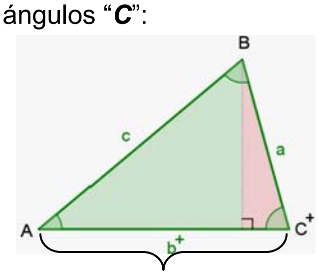


$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}{\cdot}\cos A - \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$

Para facilitar nuestra investigación, comparemos los dos triángulos lado al lado. Nótate que se usan los símbolos $\boldsymbol{b}^-$ y $\boldsymbol{b}^+$ para distinguir entre las longitudes de la bases de los dos triángulos, y los símbolos $\boldsymbol{C}^-$ y $\boldsymbol{C}^+$ para distinguir entre las medidas de sus respectivos ángulos “***C***”:



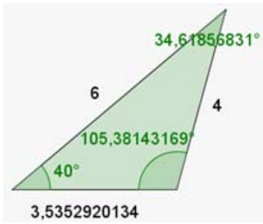
$\boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{c}{\cdot}\cos A - \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$

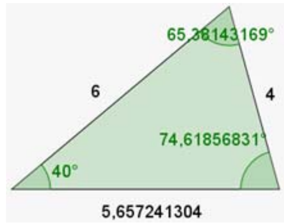


$\boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{c}{\cdot}\cos A + \sqrt{a^2 - (c{\cdot}\mathrm{sen}A)^2}$

En este momento, para comprobar las fórmulas para $\boldsymbol{b}^-$ y $\boldsymbol{b}^+$, deberíamos verificar que ellos dan medidas correctas para algún par específico de triángulos. Por ejemplo, el par que habíamos examinado antes:

Siempre es aconsejable probar de esta forma, cualquier fórmula que desarrollemos.





Voy a usar solamente 4 cifras en los cálculos. La longitud de la base del triángulo a la izquierda corresponde a $\boldsymbol{b}^-$, entonces debe verificarse que $6\cos 40° - \sqrt{4^2 - (6\operatorname{sen}40°)^2} = 3.5353$. A ver:

$$6\cos 40° - \sqrt{4^2 - (6\operatorname{sen}40°)^2} = 6\cdot 0.7660 - \sqrt{16 - (6\cdot 0.6428)^2}$$

$$= 4.5963 - 1.0610 = 3.5353. \text{ Está bien.}$$

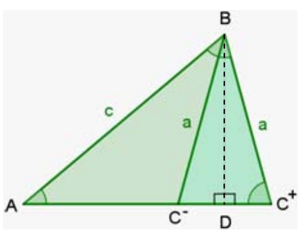
$\boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{c}\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$

En cambio, la longitud de la base del triángulo a la derecha corresponde a $\boldsymbol{b}^+$. Entonces, debe verificarse que $6\cos 40° + \sqrt{4^2 - (6\operatorname{sen}40°)^2} = 5.6572$. En el cálculo anterior, encontramos que $6\cos 40° = 4.5963$, y $\sqrt{16 - (6\cdot 0.6428)^2} = 1.0610$. Por lo tanto,

$$6\cos 40° + \sqrt{4^2 - (6\operatorname{sen}40°)^2} = 4.5963 + 1.0610 = 5.6573. \text{ Está bien.}$$

$\boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{c}\cdot\cos A + \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$

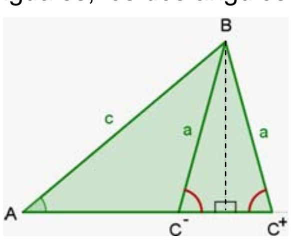
Ya convencidos, al menos en cierta medida, de que nuestras fórmulas para $\boldsymbol{b}^-$ y $\boldsymbol{b}^+$ son correctas, podemos comparar los dos triángulos de una forma más: con el uno superimpuesto sobre el otro:



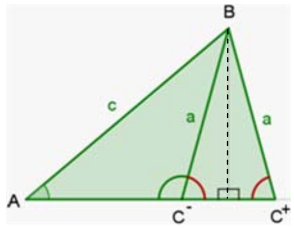
$\boldsymbol{C}^+$ es la medida del ángulo AC^+B

$\boldsymbol{C}^-$ es la medida del ángulo AC^-B

Presenté este último dibujo, para comparar las medidas de los ángulos $\boldsymbol{C}^-$ y $\boldsymbol{C}^+$. Si sacamos el oxido de nuestra geometría plana, reconoceremos que son iguales, los dos ángulos señalados en rojo:



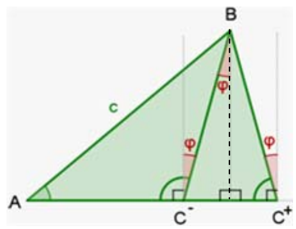
De esta forma, se puede notar que ***C***⁻ (es decir, el ángulo verde en el dibujo siguiente) y el ángulo rojo forman una recta,



de modo que

$C^{-} + C^{+} = 180°.$

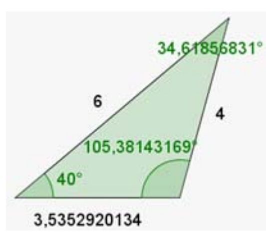
Con base en otros conocimientos sobre la geometría clásica, reconoceremos que son iguales los tres ángulos "***φ***":

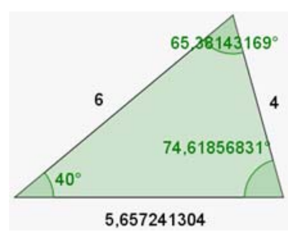


Por lo tanto, las siguientes relaciones entre las medidas de los ángulos $\boldsymbol{C^{-}}$ y $\boldsymbol{C^{+}}$:

$C^{+} = 90° - \varphi$, y $C^{-} = 90° + \varphi$.

Otra vez, deberíamos poner a prueba estas relaciones antes de que sigamos adelante. ¿Se verifican para los dos triángulos específicos que tratamos?





Resulta que sí, se verifica que

105.3814° + 74.6186° = 180°,

y

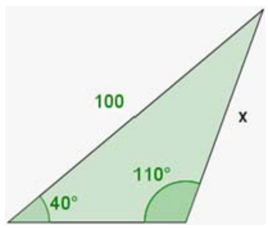
105.3814° = 90° + 15.3814°, mientras 74.6186° =90° - 15.3814°.

Lo que sí, se ha logrado a esas alturas.

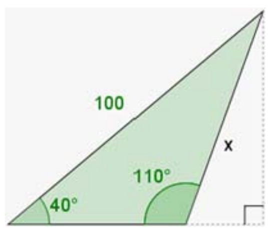
Bueno, nuestra investigación sobre triángulos con medidas dadas en la forma de literales, nos ha llevado a fórmulas que predijeron las relaciones entre medidas de ángulos y segmentos en dos triángulos específicos, uno de los cuales fue un triángulo obtusángulo. Un buen indicio de que vamos desarrollando nuestras habilidades. Ya que todavía nos falta una técnica para resolver triángulos obtusángulos, ¿qué tal si empleamos nuestras habilidades para intentar resolver unos cuantos de estos?

La resolución de triángulos obtusángulos a través de la idea que tuvo la alumna

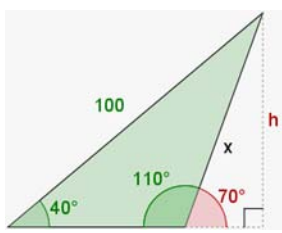
Un artificio que hemos usado con provecho, es trasformar el problema dado, en uno que trata de triángulos rectángulos. Intentemos emplearlo para encontrar la dimensión ***x*** en el siguiente triángulo:



Primero, agreguemos unos cuantos elementos "auxiliares":



Acto seguido, se identifica la medida del ángulo rojo, y se expresa la longitud del segmento vertical por medio de un literal:



Ahora, para encontrar el valor de ***x***, buscamos una equivalencia -o sea, una igualdad- en la que ***x*** intervenga. Entre otras posibilidades, se tiene que

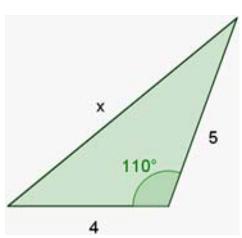
$h = x \operatorname{sen} 70°$, y también, que $h = 100 \operatorname{sen} 40°$,

por lo que

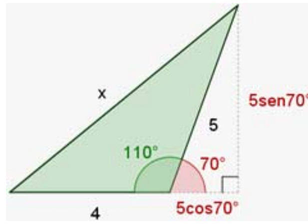
$$x \operatorname{sen} 70° = 100 \operatorname{sen} 40° \quad \text{y} \quad x = \frac{100 \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 70°}\,. \Leftarrow\Leftarrow$$

Esta solución nos suena de una que proviene de la Ley de Los Senos para triángulos acutángulos.

Intentemos resolver este problema también,



a través del mismo artificio de agregarle elementos auxiliares al triángulo dado:



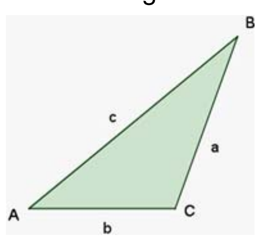
El triángulo dado, junto con el auxiliar, forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es ***x***, y cuyos catetos miden 5sen70° y 4 + 5sen70°. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (4 + 5\cos 70°)^2 + (5\,\mathrm{sen}\,70°)^2 \\
&= 4^2 + 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 70° + 5^2\cdot(\cos 70°)^2 + 5^2\cdot(\mathrm{sen}\,70°)^2 \\
&= 4^2 + 5^2\cdot[(\cos 70°)^2 + (\mathrm{sen}\,70°)^2] + 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 70° + \\
&= 4^2 + 5^2\cdot[1] + 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 70° \\
&= 4^2 + 5^2 + 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos 70° \ ⇦⇦
\end{aligned}
$$

Esta solución nos suena de una que proviene de la Ley de Los Cosenos para triángulos acutángulos.

Reflexionando sobre ésta solución y la anterior, puede que le ocurran a alguien las siguientes modificaciones a las Leyes del Seno y del Coseno, para los triángulos obtusángulos.

Sea ***C*** el ángulo obtuso



Entonces, se verifica que

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} = \frac{c}{\mathrm{sen}(180° - C)}$$ (Ley de los Senos, modificada)

Es aconsejable que demuestres estas fórmulas.

y

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\{\cos(180° - C)\}$$ (Ley de los Cosenos, modificada)

O si uno prefiere, esta última puede ser escrito como

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\{-[\cos(180° - C)]\}$$

Nos costó un poco de trabajo para desarrollar estas fórmulas, pero no tanto, y resultan sumamente factibles.

¿Nos es lícito definir el seno y el coseno a nuestro gusto?

Bien puede ser que fórmulas como aquellas que acabamos de desarrollar se emplearon por muchos años para resolver triángulos oblicuángulos. Pero llegó el día cuando alguien ideó definir las funciones trigonométricas para ángulos obtusos. Tal vez lo hiciera por contemplar las modificaciones que acabamos de proponer. Por ejemplo, al examinar la ecuación

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen}(180° - C)} ,$$

alguien podría preguntarse, "¿Qué tal si d hacemos la siguiente definición?

> Si θ es mayor que 90°, pero menor que o igual a 180°, entonces
> $\operatorname{sen}\theta \equiv \operatorname{sen}(180° - \theta)$.

Esta definición nos permitiría tener una sola Ley de Los Senos que funcione para triángulos oblicuángulos al igual que para los acutángulos. Es más, al reflexionar sobre la Ley (Modificada) de Los Cosenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\{-[\cos(180° - C)]\}$$

uno podría reconocer la posibilidad de obtener una sola Ley de los Cosenos, por hacer la siguiente definición:

> Si θ es mayor que 90°, pero menor que 180°, entonces
> $\cos\theta \equiv -\cos(180° - \theta)$.

Menciono que estas definiciones posibilitan una sola Ley de los Senos y una sola Ley de los Cosenos para triángulos oblicuángulos y acutángulos. Pero, ¿funcionará también, para los triángulos rectángulos? Trataremos esta duda al fin del capítulo.

Para ángulos agudos, el seno y el coseno se definen como razones entre lados de triángulos rectángulos. En contraste —creo— es inútil, y aun engañoso, definirlos de esta forma para ángulos obtusos. Eso porque la diferencia de signos no tiene justificación alguna, salvo que nos conviene para simplificar la formulación y resolución de problemas que tratan ángulos mayores que 90°.

La verdad es que nosotros mismos tenemos la opción de definir las funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90 °. Podemos definirlas de la forma que nos dé la gana, con tal que nuestra definición

1. Sea exacta; y empleada con coherencia; y
2. No implique ninguna contradicción.

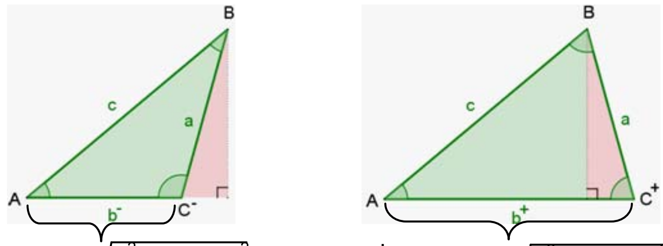
Nosotros mismos tenemos la opción de definir las funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°. Podemos definirlas de la forma que nos dé la gana, con tal que …

¿Te sorprende que nosotros podemos formular nuestras propias definiciones? ¿Es lícito hacerlo? Recuerda que conocimos una situación semejante cuando tratamos los exponentes cero, negativos, y fraccionales. En su forma original, un exponente no fue nada más que una manera breve para representar cierto tipo de cuenta de multiplicación:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\ veces} \equiv a^n ,$$

o sea, que el exponente representa cuántos factores ***a*** están en la "cadena". Pero después, descubrimos que podríamos ampliar el concepto de "exponente", con provecho, para incluir exponentes negativos, cero, y fraccionarios. Estos tipos de exponentes no tienen nada que ver con "cuántos factores ***a*** están en la cadena". Sin embargo, se aceptan porque son definidos con precisión y empleados con coherencia, y no implican ninguna contradicción.

Dicho todo esto, debemos no proponer en serio nuestras definiciones para los senos y coseno de ángulos obtusos, hasta que las hayamos puesto a prueba en otros contextos. Por ejemplo, en el caso del par de triángulos que tratamos antes:



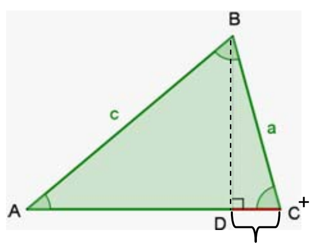
$\boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{c}\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$ $\boldsymbol{b}^+ = \boldsymbol{c}\cdot\cos A + \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$

Las medidas ***a***, ***c***, ***A*** son iguales en ambos triángulos, y $\boldsymbol{C}^+$ = 180°- $\boldsymbol{C}^+$. Si se calculan los senos de $\boldsymbol{C}^+$ y $\boldsymbol{C}^+$ por medio de la Ley de Los Senos, se encuentra que

$$\operatorname{sen} C^- = \frac{c\cdot\operatorname{sen}A}{a}, \quad \text{y} \quad \sin C^+ = \frac{c\cdot\operatorname{sen}A}{a},$$

la que es consistente con la definición “senθ ≡ sen(180°-θ)”.

En cuanto a los cosenos de $\boldsymbol{C}^-$ y $\boldsymbol{C}^+$, podemos analizar de nuevo el siguiente diagrama

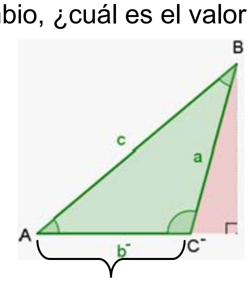


$\sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$

para reconocer, fácilmente, que

$$\cos C^+ = \frac{\sqrt{a^2-(c\cdot\operatorname{sen}A)^2}}{a}.$$

En cambio, ¿cuál es el valor de cos$\boldsymbol{C}^-$



$\boldsymbol{b}^- = \boldsymbol{c}\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen}A)^2}$

calculado a partir de la Ley de los Cosenos? Para saberlo, tendremos que despejar cos$\boldsymbol{C}^-$ en la ecuación

$$c^2 = a^2 + (b^-)^2 - 2\cdot a\cdot(b^-)\cdot\cos C^-,$$

donde

$$b^- = c \cdot \cos A - \sqrt{a^2 - (c \cdot \operatorname{sen} A)^2}\ .$$

El despeje es molesto, por lo que se presenta al fin del capítulo. Resulta que, en verdad,

$$\cos C^- = -\frac{\sqrt{a^2-(c\cdot \operatorname{sen} A)^2}}{a}\ ,$$

o sea, que cos$\boldsymbol{C^-}$ = -cos$\boldsymbol{C^+}$, la cual es consistente con la definición

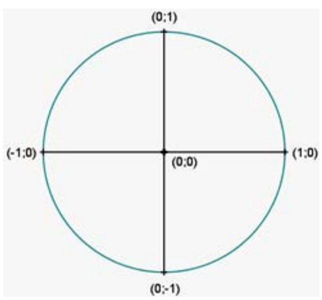
$$\cos\theta \equiv -\cos(180° - \theta)\ .$$

Entonces, las definiciones que proponemos han pasado la prueba. Pero en verdad, es útil definir los valores de funciones trigonométricos no solamente para ángulos obtusos, sino para ángulos de cualquier tamaño (inclusive para ángulos >360°). A continuación, veremos cómo los matemáticos han elegido hacerlo.

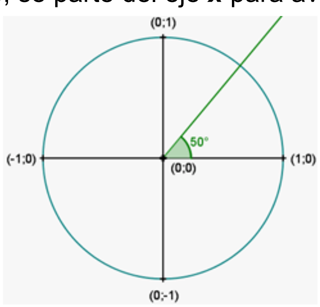
Cómo el seno y el coseno se pueden definir para cualquier ángulo, sin importar su tamaño

Con frecuencia, es mejor hacer una definición en la forma de un procedimiento, y sus resultados. En el caso de los senos y cosenos, el procedimiento comienza con una circunferencia unitaria (es decir, una de radio 1), con su centro en el origen:

Junto con esta definición, suele presentarse una unidad de medida que se llama el radian, para los ángulos. No la trato aquí, pero es aconsejable buscarla en un libro de texto o en la Internet.



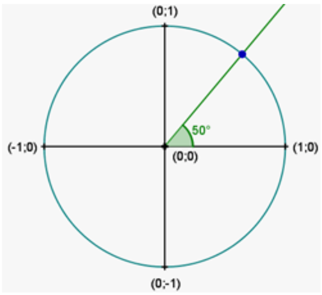
Acto seguido, se construye un ángulo del tamaño que nos interesa, con su vértice en el origen, y uno de sus lados sobre el eje ***x***. Para colocar su otro lado, se parte del eje ***x*** para avanzar en el sentido contrario al reloj:



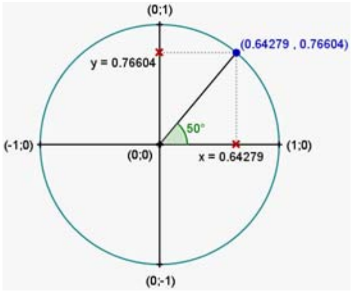
Se identifica el punto intersección de la circunferencia con ese “otro” lado, Nótate que

- El segmento entre el origen y el punto azul es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
- La coordenada ***y*** del punto azul es la longitud del cateto vertical de dicho triángulo.
- Esa coordenada se define como el seno del ángulo, por lo que la longitud del cateto vertical es igual al seno del ángulo.
- De manera parecida, la longitud del cateto horizontal es igual al coseno del ángulo.
- Ya que el segmento entre el origen y el punto azul es el radio de la circunferencia unitaria, su longitud es 1.
- Por lo tanto, según el Teorema de Pitágoras,

  $\mathbf{sen^2 + cos^2 = 1.}$



y las coordenadas del punto intersección:



Se definen el seno y coseno de la siguiente manera:

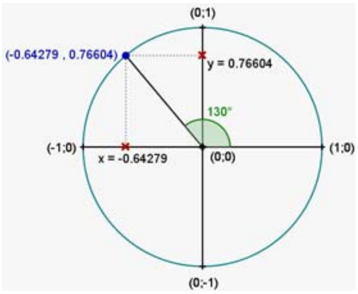
El seno ≡ la coordenada ***y*** del punto intersección. El coseno ≡ la coordenada ***x*** del punto intersección.

Por ejemplo, sen50° = 0.76604, y cos50° = 0.64279.

Se puede demostrar (no lo haré) que este procedimiento y definición sí, dan valores que coinciden con nuestras definiciones

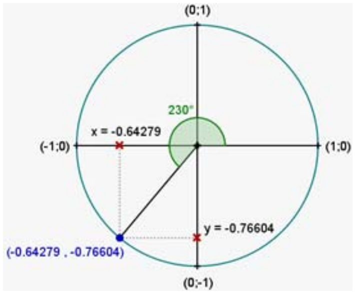
$$\cos\theta \equiv -\cos(180° - \theta) \text{ y } \operatorname{sen}\theta \equiv \operatorname{sen}(180° - \theta)\,.$$

Por ejemplo, consideremos el ángulo 130° (es decir, 180° – 50°). Según nuestras definiciones, deben cumplirse que sen130° = sen50°, y cos130° = -cos50°. Y ¡así es¡



sen130° = 0.76604 = sen50° cos130° = -0.64279 = -cos50°

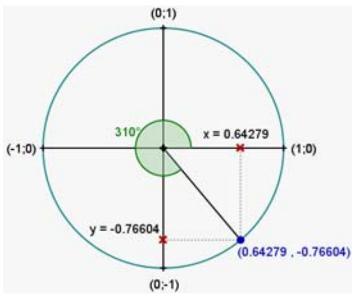
No quiero salir de este tema sin dar ejemplos de cómo son los senos y cosenos de ángulos mayores de 180, según esta definición:



El seno y el coseno de 230° (180° + 50°)

sen230° = -0.76604 = -sen50°

cos230° = -0.64279 = -cos50°

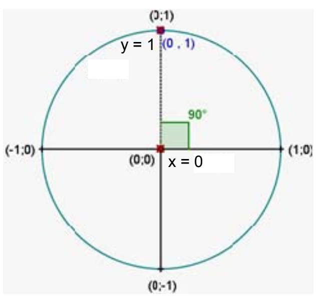


El seno y el coseno de 310° (360° - 50°)

sen310° = -0.76604 = -sen50°

cos310° = 0.64279 = cos50°

Y como un beneficio más, este procedimiento nos permite definir, con pleno sentido, el seno y el coseno de 90°. Ya que las coordenadas del punto intersección son (0,1),



sen90° = 1

cos90° = 0

¿Puedes ver que según esta definición,

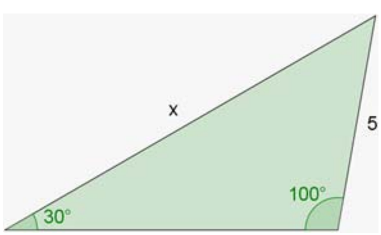
cos0° = 1, sen0° = 0

cos180° = -1, sen180° = 0 ?

Ya es tiempo, creo, de practicar con estas ideas.

Más ejemplos

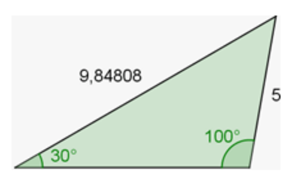
1. Encontrar ***x***.



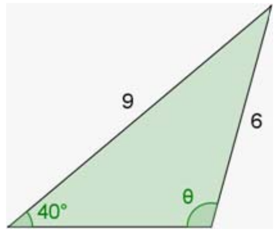
Por la Ley de los Senos,

$$\frac{x}{\text{sen}\,100°} = \frac{5}{\text{sen}\,30°}\,.$$

Por lo tanto, $x = \text{sen}\,100° \cdot \dfrac{5}{\text{sen}\,30°} = 9.848$. ⇦⇦



2. Encontrar $\boldsymbol{\theta}$.

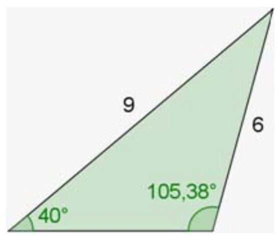


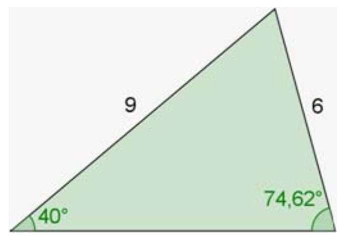
Por la Ley de los Senos,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{9} = \frac{\operatorname{sen}40°}{6} .$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = 9 \cdot \frac{\operatorname{sen}40°}{6} = 0.96418$. ⇦⇦

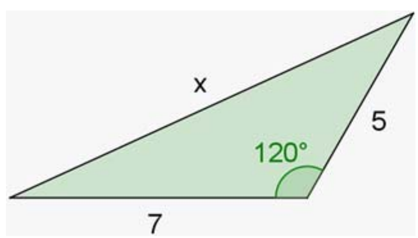
Hay dos ángulos menores que 180° cuyo seno es 0.96418. Concretamente, son 74.62° y 105.38°. Resulta que ese es un caso ambiguo, porque existen dos triángulos que cumplen los datos:

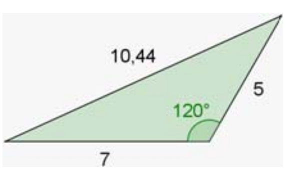




Si ése fuera un problema real, tendríamos que obtener más información, para saber cuál triángulo corresponden a la realidad.

3. Encontrar $\boldsymbol{x}$.



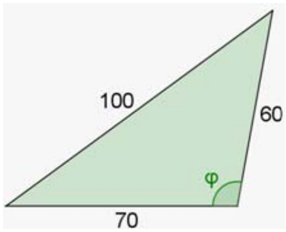


Por la Ley de los Cosenos,

$$x^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 109$$

$$\therefore x^2 = 10.44 \text{ . ⇦⇦}$$

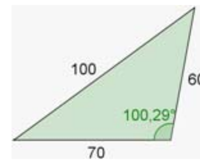
4. Encontrar $\boldsymbol{\varphi}$.



Por la Ley de los Cosenos,

$$100^2 = 70^2 + 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos\varphi$$

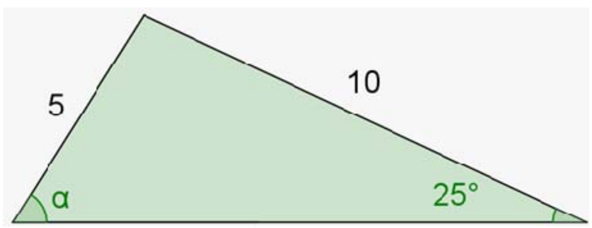
$\therefore \cos\varphi =$ -0.17857, por lo que φ = 100.29°. ⇦⇦



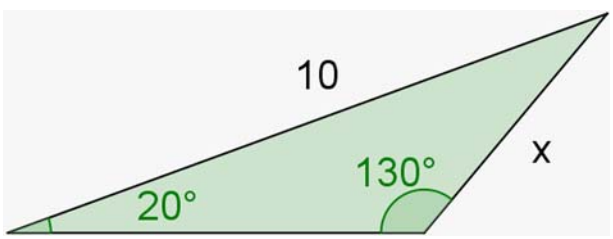
Ejercicios y respuestas

Ejercicios

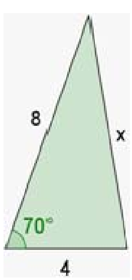
1. Encontrar α.



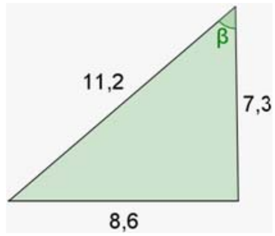
2. Encontrar **x**.



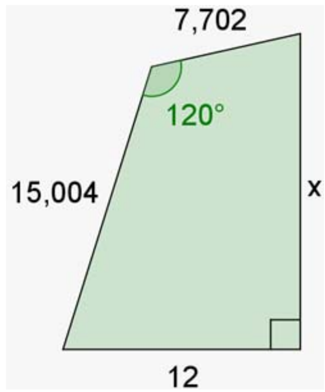
3. Encontrar ***x***.



4. Encontrar β.



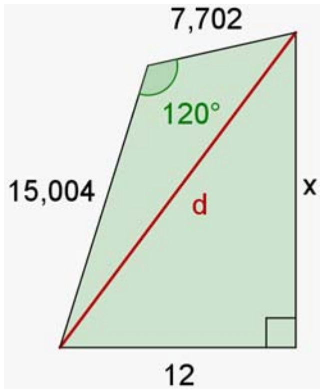
5. Encontrar $\boldsymbol{x}$.



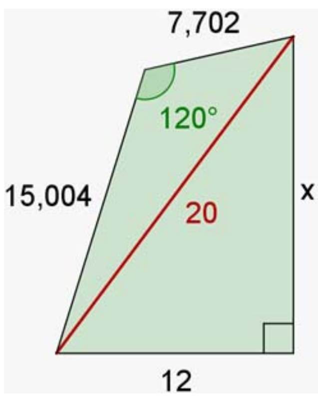
Respuestas

1. Se usa la Ley de los Senos para encontrar que $\alpha = 57.69°$.
2. Se usa la Ley de los Senos para encontrar que $\boldsymbol{x} = 4.465$.
3. Se usa la Ley de los Cosenos para encontrar que $\boldsymbol{x} = 7.623$.
4. Se usa la Ley de los Cosenos para encontrar que $\beta = 50.15°$.

5. Primero, con fines de encontrar una idea, se agrega al dibujo un elemento auxiliar:



Reflexionando de nuevo el dibujo, notamos que el segmento rojo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y ***x***, respectivamente. Entonces, podríamos encontrar ***x*** si supiéramos la longitud (***d***) del segmento rojo. Para encontrarlo, se aplica la Ley de los Cosenos al triángulo que contiene el ángulo que mide 120°. Resulta que el segmento mide 20.



Ya podemos encontrar ***x***:

$$x^2 + 12^2 = 20^2 \ ,$$

$$\therefore x = 16. \ ⇦⇦$$

Resumen del capítulo

- **Partiendo de la idea que tuvo "la alumna", y nuestros conocimientos sobre triángulos rectángulos,**
  - Logramos desarrollar procedimientos para la resolución de triángulos oblicuángulos agudos.
  - Convertimos nuestros procedimientos en las fórmulas conocidas por los nombres de "La Ley de Los Senos" y "La Ley de Los Cosenos".
- **Investigamos sobre un "caso ambiguo", donde existen dos triángulos de acuerdo con los datos. Esta investigación**
  - Nos indicó como emplear nuestros conocimientos sobre triángulos rectángulos en la resolución de triángulos oblicuángulos obtusos.

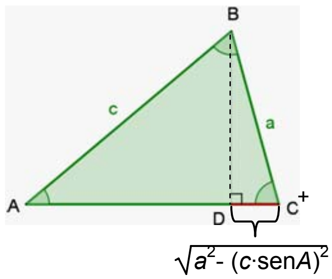
- Planteó la posibilidad de definir los senos y cosenos de ángulos entre 90° y 180°.

- **Reconocimos que pudimos definir a nuestro gusto los senos y cosenos de ángulos entre 90° y 180°, con tal que nuestras definiciones**
  - Sean exactas; y empleadas con coherencia; y
  - No impliquen ninguna contradicción.
- **Nuestras definiciones para los senos y cosenos de ángulos entre 90° y 180° tuvieron las siguientes características y beneficios:**
  - $\cos\theta \equiv -\cos(180° - \theta)$ y $\operatorname{sen}\theta \equiv \operatorname{sen}(180° - \theta)$.
  - Con los senos y cosenos definidos de esta forma, las Leyes del Seno y del Coseno se verifican para todo triángulo.
  - En el caso de los triángulos rectángulos, la Ley de los Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras, y la de los Senos se reduce a las fórmulas usuales para el seno y el tangente en los triángulos rectángulos.
- **Conocimos un ejemplo de cómo definir una cantidad como el resultado de un procedimiento. Concretamente, cómo usar una construcción geométrica para definir el seno y el coseno de cualquier ángulo, sin importar su tamaño.**
- **Todas verdades dadas en el siguiente listado se verifican, siempre, en todo triángulo. Sin embargo, nos resultan útiles solamente aquellos**
  - En las que figuran el lado o el ángulo que queremos encontrar, y
  - En las que los datos que tenemos, permiten que la cantidad que queremos encontrar sea la única incógnita.
  - ***todo*** triángulo tal.

Verdades para todo triángulo	
Verdades que tratan del coseno	**Verdades que tratan del seno**
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$	$\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}B}{b}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$	$\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}C}{c}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(cosC)$	$\frac{\operatorname{sen}B}{b} = \frac{\operatorname{sen}C}{c}$
	O sea, $\frac{\operatorname{sen}A}{a} = \frac{\operatorname{sen}B}{b} = \frac{\operatorname{sen}C}{c}$.

Demostración de que la resolución de los casos ambiguos por medio de la Ley de los Cosenos, requiere que se defina cos(θ)≡cos(180°-θ) para 90°<θ<180°

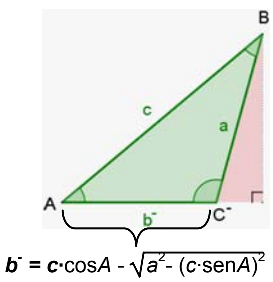
En el curso de nuestra investigación del “caso ambiguo”, identificamos que en el uno de los dos triángulos posibles,



el coseno del ángulo de la esquina derecha inferior es

$$\cos C^{+} = \frac{\sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen} A)^2}}{a}.$$

En cambio, ¿cuál es el valor del coseno del ángulo correspondiente (el ***C***$^-$) en el otro de los dos triángulos posibles?



Para saberlo, tendremos que despejar cos***C***$^-$ en la ecuación

$$c^2 = a^2 + (b^-)^2 - 2\cdot a\cdot(b^-)\cdot\cos C^-,$$

donde

$$b^- = c\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen} A)^2}\ .$$

Ya que queremos saber si cos***C***$^-$ = $^-$cos***C***$^+$, tendremos que simplificar el resultado considerablemente. ¡Manos a la obra! Primero, queremos desarrollar algunos de los productos:

$$c^2 = a^2 + (b^-)^2 - 2\cdot a\cdot(b^-)\cdot\cos C^-$$

$$= a^2 + \left(c\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen} A)^2}\right)^2$$
$$-2\cdot a\cdot\left(c\cdot\cos A - \sqrt{a^2 - (c\cdot\operatorname{sen} A)^2}\right)\cdot\cos C^-\ .$$

$$= a^2 + c^2\, cos^2 A - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c\cdot sen\, A)^2} + a^2 - c^2\, sen^2\, A$$
$$-2\cdot a\cdot\left(c\cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c\cdot sen\, A)^2}\right)\cdot cos\, C^-$$

$$= 2a^2 + c^2(cos^2 A - sen^2 A) - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c\cdot sen\, A)^2}$$

$cos^2 A - sen^2 A$
$= (1 - sen^2 A) - sen^2 A$
$= 1 - 2\, sen^2 A$

$$-2 \cdot a \cdot \left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right) \cdot cos\, C^-$$

$$= 2a^2 + c^2(1 - 2\, sen^2 A) - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}$$
$$-2 \cdot a \cdot \left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right) \cdot cos\, C^-$$

$$= 2a^2 + c^2(1 - 2\, sen^2 A) - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}$$
$$-2 \cdot a \cdot \left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right) \cdot cos\, C^- ,$$

$$\therefore c^2 = 2a^2 + c^2 - 2c^2\, sen^2 A - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}$$
$$-2 \cdot a \cdot \left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right) \cdot cos\, C^-.$$

Logrado esta simplificación preliminar, ya podemos, con provecho, despejar al cos***C***$^-$:

$$cos\, C^- = \frac{2a^2 - 2c^2\, sen^2 A - 2c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}}{2 \cdot a \cdot \left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right)}$$

$$= \frac{a^2 - c^2\, sen^2 A - c\, cos\, A\sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}}{a\left(c \cdot cos\, A - \sqrt{a^2 - (c \cdot sen\, A)^2}\right)} .$$

Para ahorrarnos tiempo y trabajo, hagamos la siguiente definición:

Definición de "♥".

Sea ♥ = a^2- (c·sen***A***)^2 ,

de modo que

$$cos\, C^- = \frac{a^2 - c^2\, sen^2 A - c\, cos\, A\sqrt{♥}}{a\left(c \cdot cos\, A - \sqrt{♥}\right)} .$$

Queremos demostrar que cos***C***$^-$ = -cos***C***$^+$, o sea, que

$$\cos C^- = -\frac{\sqrt{a^2 - (c \cdot \text{sen}\, A)^2}}{a} = -\frac{\sqrt{♥}}{a} .$$

A diferencia del denominador de nuestra expresión actual para cos***C***$^-$, esa última no tiene nada por el estilo de "c·cos***A*** - $\sqrt{♥}$ ". Entonces, buscamos cómo trasformar la nuestra. Una idea viene de una maniobra que se usa para simplificar (por hacer racional) el denominador de una fracción como $\frac{7}{4-\sqrt{3}}$. Se lo trasforma en una diferencia de cuadradas perfectas:

$$\frac{7}{4-\sqrt{3}} = \left[\frac{7}{4-\sqrt{3}}\right] \cdot \left[\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\right] = \frac{7(4+\sqrt{3})}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{7(4+\sqrt{3})}{16-3} = \frac{7(4+\sqrt{3})}{13} .$$

La expresión que hemos obtenido para cos***C***$^-$ es más fea que $\frac{7}{4-\sqrt{3}}$, , pero el procedimiento es igual:

$$cos\, C^- = \frac{a^2 - c^2\, sen^2 A - c\, cos\, A\sqrt{♥}}{a\left(c \cdot cos\, A - \sqrt{♥}\right)}$$

$$= \left[\frac{a^2 - c^2\, sen^2 A - c\, cos\, A\sqrt{♥}}{a\left(c \cdot cos\, A - \sqrt{♥}\right)}\right] \cdot \left[\frac{c \cdot cos\, A + \sqrt{♥}}{c \cdot cos\, A + \sqrt{♥}}\right]$$

¡Confieso que no encontré esta ruta en mi primer intento!

$$= \left[\frac{(a^2 - c^2\, sen^2 A) - c\, cos\, A\sqrt{♥}}{a\left(c \cdot cos\, A - \sqrt{♥}\right)}\right] \cdot \left[\frac{c \cdot cos\, A + \sqrt{♥}}{c \cdot cos\, A + \sqrt{♥}}\right]$$

$$= \frac{(a^2 - c^2\, sen^2\, A)(c \cdot cos\, A) + (a^2 - c^2\, sen^2\, A)\sqrt{\heartsuit} - (c\, cos\, A\sqrt{\heartsuit})(c \cdot cos\, A) - c\, cos\, A\left(\sqrt{\heartsuit}\right)^2}{a\left[(c \cdot cos\, A)^2 - \left(\sqrt{\heartsuit}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{(a^2 - c^2\, sen^2\, A)(c \cdot cos\, A) + [a^2 - c^2(sen^2\, A + cos^2\, A)]\sqrt{\heartsuit} - c\, cos\, A\overbrace{(a^2 - c^2\, sen^2\, A)}^{\left(\sqrt{\heartsuit}\right)^2}}{a\left[c^2\, cos^2\, A - \underbrace{(a^2 - c^2\, sen^2\, A)}_{\left(\sqrt{\heartsuit}\right)^2}\right]}$$

Los términos amarillos se anulan.

$$= \frac{\left[a^2 - c^2\overbrace{(sen^2\, A + cos^2\, A)}^{1}\right]\sqrt{\heartsuit}}{a\left[c^2\underbrace{(cos^2\, A + sen^2\, A)}_{1} - a^2\right]}$$

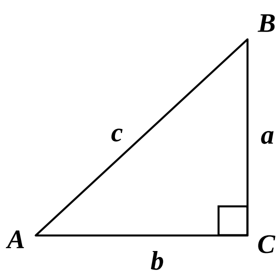
$$= \frac{[a^2 - c^2]\sqrt{\heartsuit}}{a[c^2 - a^2]}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2 - a^2} = -1$$

$$= -\frac{\sqrt{\heartsuit}}{a}\text{, o sea, } -\frac{\sqrt{a^2 - (c \cdot \text{sen}\, A)^2}}{a}\ .\ ⇦⇦$$

¿Qué pasa cuando las Leyes del Seno y del Coseno se aplican a los triángulos rectángulos?

Examinemos primero lo qué pasa cuando se usa la Ley de Los Cosenos, con referencia al siguiente diagrama.



Cuando el ángulo que nos interesa es el ángulo recto (***C***), la ecuación correspondiente al enunciado de dicha Ley es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)\ .$$

Pero el valor del coseno de un ángulo recto es 0 (cero), por lo que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(0)\ ,$$

o sea,

$$c^2 = a^2 + b^2\ .$$

Este último es el enunciado del Teorema de Pitágoras. Pero, ¿qué pasa cuando el ángulo que nos interesa no es el recto? Digamos que es el ***A***. Según la Ley de Los Cosenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)\ .$$

Por nuestros conocimientos sobre los triángulos rectángulos, sabemos que

$$c \cdot (\cos A) = b\ .$$

Así que

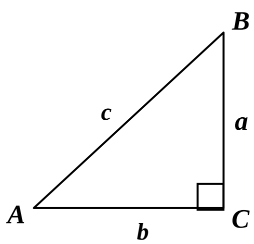
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$$

se trasforma de la siguiente manera:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b[c(\cos A)]$$
$$= b^2 + c^2 - 2b[b]$$
$$= b^2 + c^2 - 2b^2$$
$$= c^2 - b^2 \, .$$

Entonces, $a^2 = c^2 - b^2$, la que es el mismo Teorema de Pitágoras, después de despejar al $\boldsymbol{a^2}$. Entonces,

En un triángulo rectángulo, la Ley de Los Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras.



En cuanto a la Ley de Los Senos, examinamos primero el caso donde uno de los dos ángulos (***C***) es el ángulo recto:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

El seno de 90° (o sea, del ángulo recto) es 1. Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{1}{c} \, .$$

Ahora, despejamos al seno para encontrar que

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \, .$$

Un resultado bien familiar: *Seno = cateto opuesto sobre hipotenusa.*

Cuando ni el uno ni el otro de los dos ángulos es el recto, La Ley de Los Senos nos dice que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \, .$$

Pero en un triángulo rectángulo, se tiene que sen*B* = cos*A,* luego

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\cos A}{b} \, .$$

Esta última se trasforma en

$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{a}{b}$; o sea, en

$\tan A = \frac{a}{b}$, ya que $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$.

El resultado $\tan A = \frac{a}{b}$ nos es bien conocido también: *Tangente = cateto opuesto sobre cateto adyacente.*

Con base en esta investigación, podemos decir que

En un triángulo rectángulo, la Ley de Los Senos se reduce a las fórmulas usuales para el seno y el tangente en un triángulo tal.