Una reflexión sobre cómo enseñar estrategias para la resolución de problemas al desarrollar procedimientos para la división con números mayas

Es innegable que la división de por sí es molesta, sin importar con cuál numeración se efectúa. Es más, hasta las calculadoras de bolsa más baratas pueden efectuar en una cuestión de segundos, una división que nos costaría varios minutos para efectuarla de forma manuscrita.

Por lo tanto, personas de buena voluntad discrepan la una de la otra en sus opiniones relativas a cuánto tiempo se debería dedicar a la enseñanza de la división. Más todavía cuando se contempla enseñar la división manuscrita no solamente con la numeración indo arábiga (IA), pero con la maya también.

Sea cual fuere nuestra decisión al respecto, debe no perderse a la vista, la oportunidad que la división con números mayas ofrece para enseñar técnicas que resultan útiles en la resolución de muchos tipos de problemas. Así que en este documento se examina primero la división en general, para luego notar cómo el procedimiento maya auténtico difiere del que se enseña para efectuar la división con números IA.

En efecto, ese último es un procedimiento para restar eficientemente un mismo número repetidas veces, mientras el procedimiento maya es una especie de acertijo. Partiendo de esta observación, doy ejemplos de estrategias que son útiles en la resolución de problemas, y cómo usarlos para examinar la división maya. Incluyo un repaso de la multiplicación maya.

En este documento, nunca demuestro cómo dividir con números mayas. La dejo como ejercicio para los maestros y sus alumnos.

Sobre la división en general

Hay dos tipos de problema que se resuelven por medio de la división. Aquí tenemos un ejemplo de cada tipo:

> Tipo A: Juan tiene 180 manzanas, y quiere empacarlas en bolsas de 12. ¿Cuántas bolsas puede llenar?

> Tipo B: Juan quiere repartir 180 manzanas igualmente entre 15 personas. ¿Cuántas manzanas recibirá cada cual?

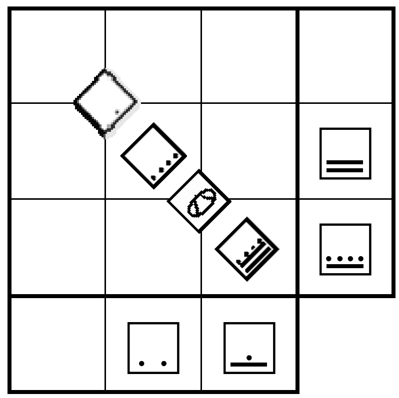
Problemas del Tipo A pueden ser resueltos por pensar, ¿"Cuántos grupos de 12 manzanas se pueden restar a 180?" También los problemas del Tipo B. Es decir, podemos pensar,

> "Bueno, para que cada una de las 15 personas reciba una primera manzana, es necesario restar 15 manzanas de las 180. Es necesario restar otro grupo de 15 para que cada persona reciba una segunda manzana. Y para recibir una tercera manzana, otro grupo de 15. Entonces, el número de manzanas que cada persona recibirá, es igual a cuántos grupos de 15 se pueden restar a 180."

En vista de que ambos tipos de problema pueden ser resueltos por encontrar cuántos grupos de **n** cosas puede ser restados de **m** cosas, es de esperarse que se desarrollaran técnicas eficientes para saberlo.

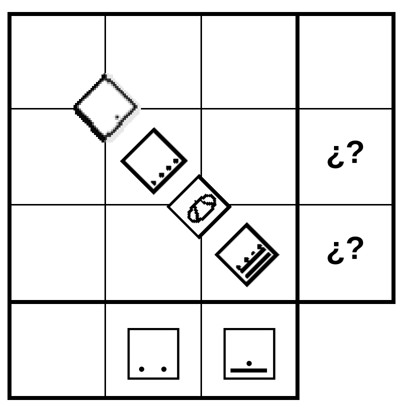
Uno de ellos es el procedimiento para la división de números indo arábigos (IA) que se enseña en las escuelas. Es altamente eficiente porque los valores de lugar en la numeración IA son potencias del número de base (el número 10), pero al fin de las cuentas, es una técnica rápida para restar un número repetidas veces de algún otro número.

La misma técnica funciona con números mayas, porque la numeración maya también tiene valores de lugar que son potencias de su número de base (20). Pero a juzgar por lo que viene en el libro por Calderón, los mayas no usaron esa técnica, sino una basada en un concepto bastante diferente. La explico con referencia al siguiente diagrama, que muestra el resultado de la multiplicación 46 x 209 = 9614, en el tablero que los mayas usaron para sus cálculos.



Bajo este concepto, una cuenta de la división es una clase de acertijo:

Aquí tienes el resultado de una multiplicación, y uno de los multiplicandos. Encontrar el otro.



Antes de seguir a resolver el acertijo, cabe mencionar que la eficiencia del procedimiento para números IA se debe únicamente a la naturaleza de dicha numeración. También se debe a que el procedimiento se ha simplificado tras mucho tiempo.

Lo malo de esta simplificación es que ya no es obvio por qué el procedimiento funciona. Entonces su eficiencia viene a costas de su utilidad pedagógica.

Uno de los beneficios de empezar desde cero, para tratar la división como un acertijo, es que de esta forma se puede entender por qué funciona el procedimiento que Calderón presenta en su libro.

Ojala de esta forma podamos efectuarla más fácilmente.

Pero esto es cierto también para el procedimiento maya. Uno de los beneficios de empezar desde cero, para tratar la división como un acertijo, es que de esta forma se puede entender por qué funciona el procedimiento "pulido" que Calderón presenta.

¿Cómo resolver el acertijo?

Bueno, aceptamos que la división con números mayas es una especie de acertijo. ¿Cómo resolverlo? ¿Cómo encontrar una pista?

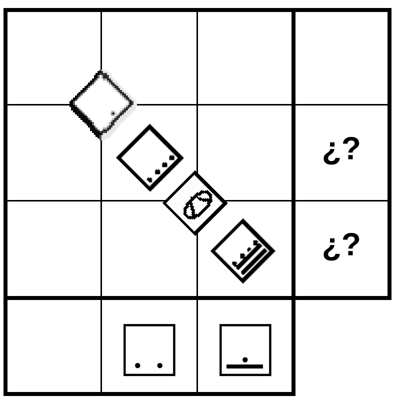
Hay dos preguntas que pueden guiarnos:

¿Qué sabemos?

¿Qué queremos?

Dos preguntas claves.

En el caso de la división que acabamos de ver,



sabemos el producto y un multiplicando. Además, sabemos cómo multiplicar en un tablero. **Queremos** encontrar el otro multiplicando. O pensando más en grande, dado el producto de una multiplicación, y uno de los multiplicandos, queremos saber cómo identificar los dígitos del otro multiplicando.

Es razonable suponer que los dígitos de los multiplicandos determinan los dígitos del resultado. Entonces, puede que sea útil examinar, sistemáticamente, una serie de multiplicaciones y sus resultados.

Para encontrar una pista, a menudo es bueno examinar, de forma sistemática, varios casos específicos.

Pero, ¿qué multiplicaciones? Es aconsejable empezar con productos de pocos dígitos. ¿Qué tal 874? Tiene solamente tres dígitos, y es el producto de 2, 19, y 23:

$$2 \times 19 \times 23 = 874.$$

Esta elección de factores ofrece varias ventajas. Primero, queremos examinar al menos una multiplicación que trata un multiplicando pequeño, y 2 es el menor entero mayor que 1 (el que nos daría una multiplicación trivial). En cuanto a 19, éste es el mayor entero cuya representación vigesimal consta de un solo digito. Por fin, 23 es el menor número primo cuya representación vigesimal consta de dos dígitos, y en mi experiencia, es a menudo provechoso tratar números primos al examinar multiplicaciones y divisiones. (Nótese que 19 es un número primo también.)

En verdad, no es necesario usar números primos. Solo es mi propia tendencia. Se puede usar 21 en vez de 23.

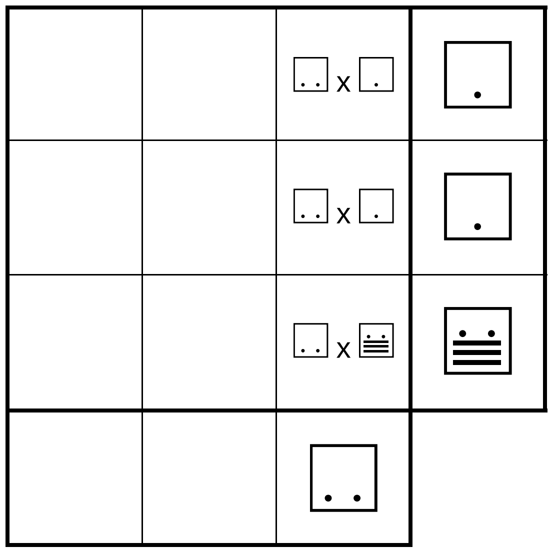
Partiendo de estos tres factores, podemos escribir tres, y solo tres, combinaciones distintas de multiplicandos:

2 x (19 x 23) = 874,   o sea,   2 x 437 = 874

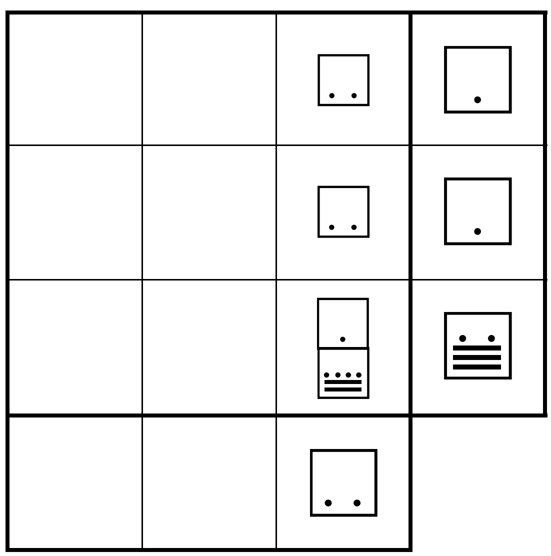
19 x (2 x 23) = 874,   o sea,   19 x 46 = 874.

23 x (2 x 19) = 874,   o sea,   23 x 38 = 874.

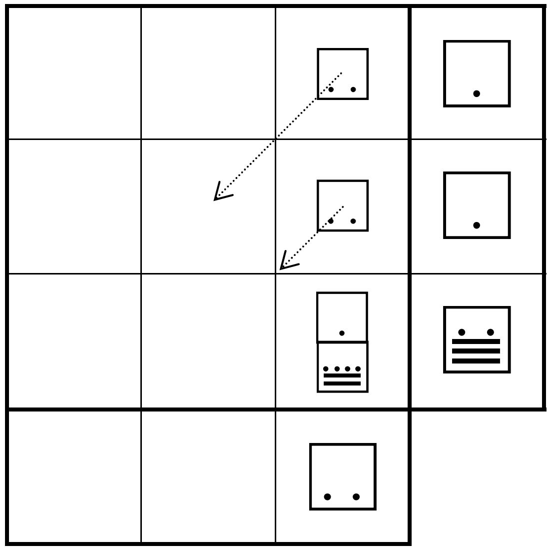
Las examinamos, una por una. Primero, la multiplicación 2 x 437. Empezamos por formar los productos de dígitos en sus respectivas casillas:



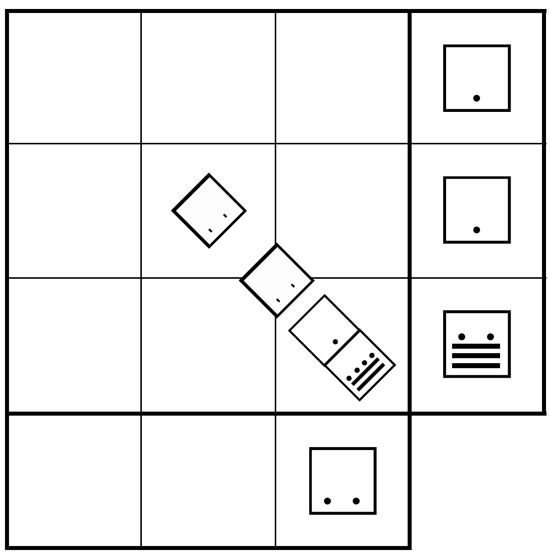
Ahora, efectuamos las multiplicaciónes:



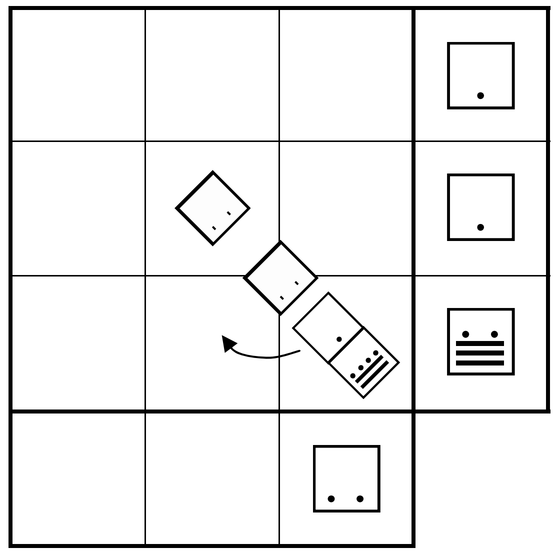
Después, sumamos las cantidades sobre los diagonales,



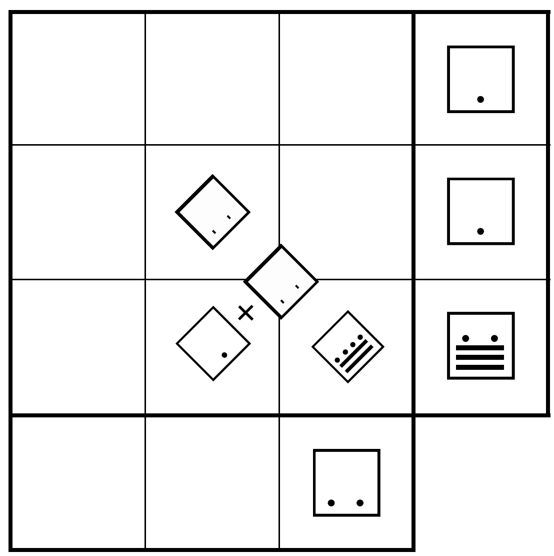
Es decir, las escribimos así:



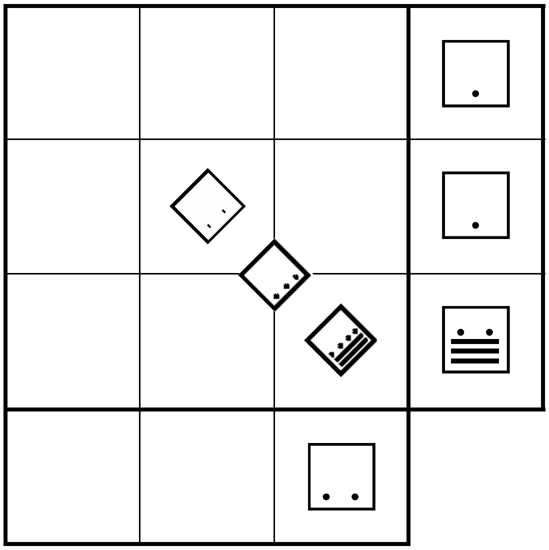
Para ordenar este resultado preliminar, “subimos” la cifra 



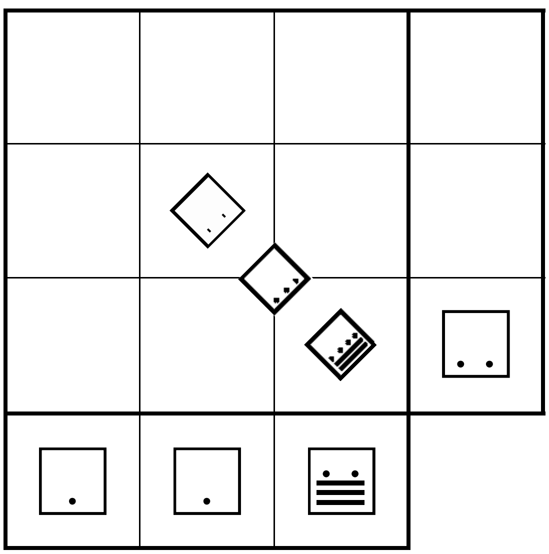
Para luego sumarla



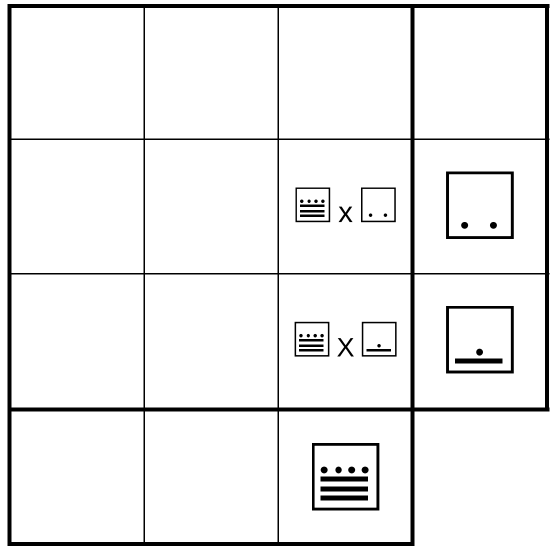
El resultado final es



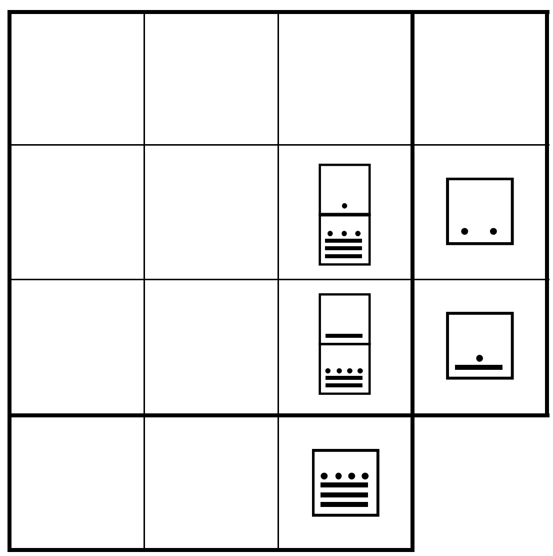
Deberíamos notar que 2 x 437 = 437 x 2, por lo que podemos presentar el siguiente tablero sin tener que hacer más trabajo:



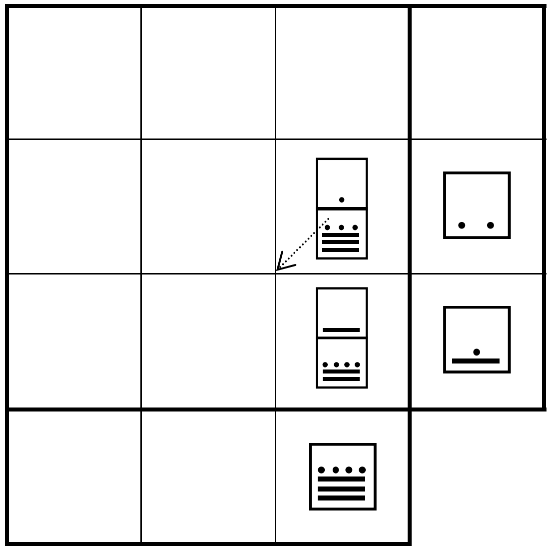
Ahora, tratemos la multiplicación 19 x 46.

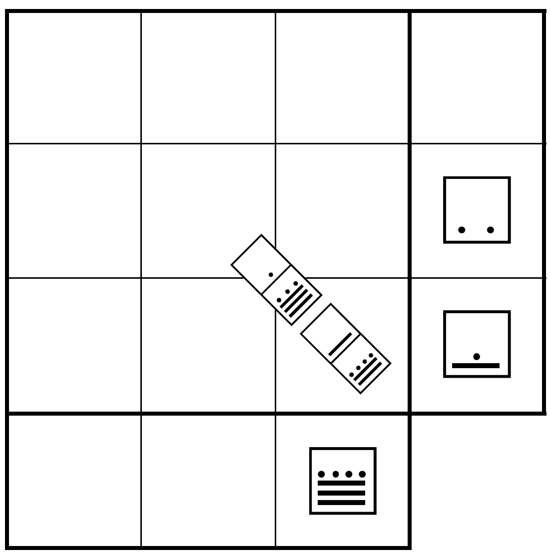


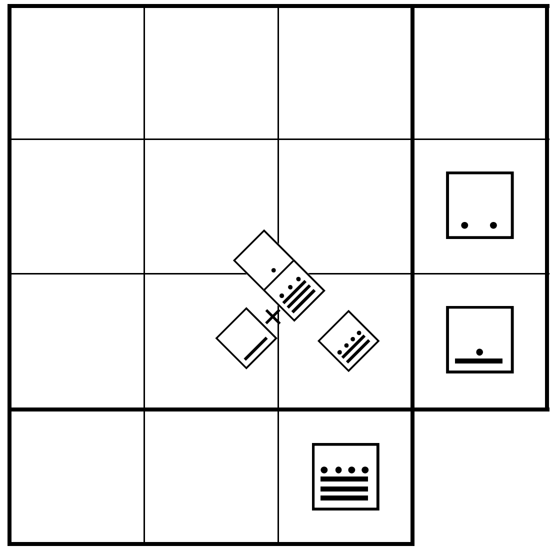
Efectuando las multiplicaciones, se obtiene

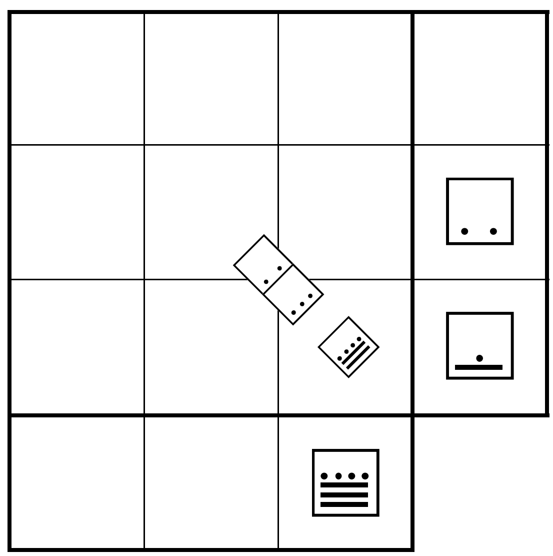


Vamos a poner este resultado preliminar en su forma final, de la misma manera que usamos en la multiplicación 2 x 437:

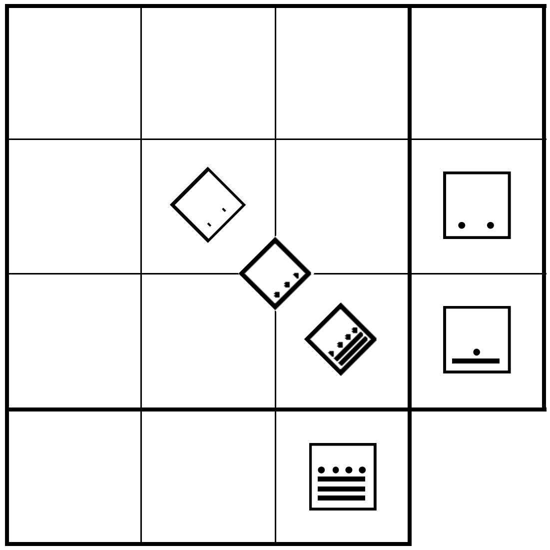




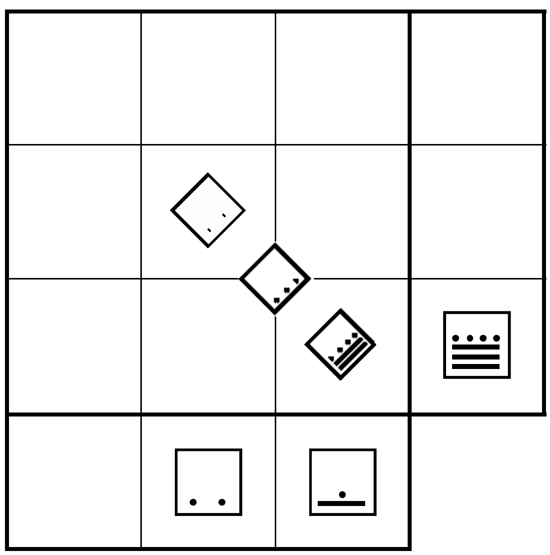




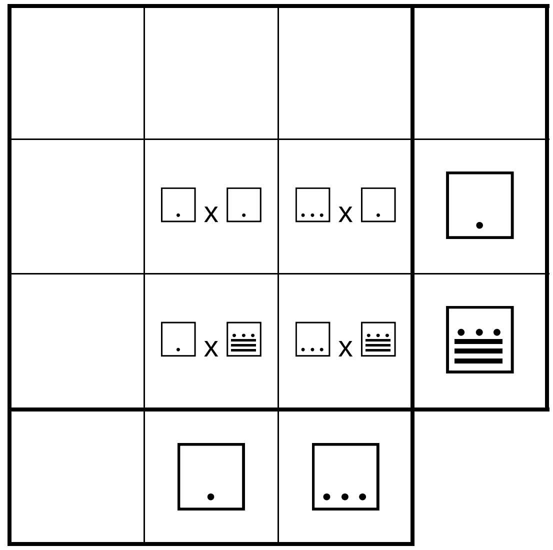
Solo tenemos que subir la cifra para tener el resultado final.

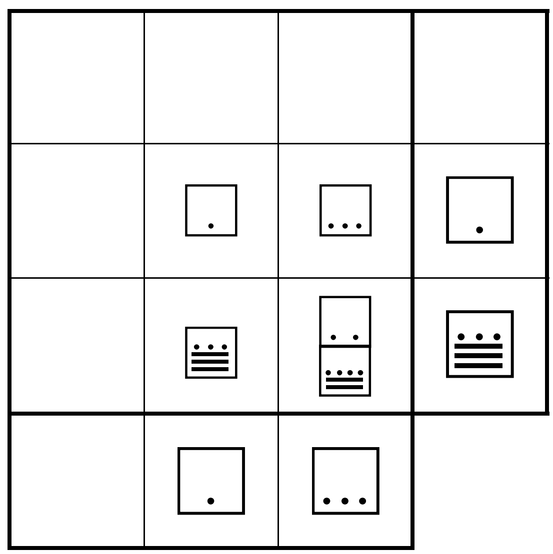


Ya que 19 x 46 = 46 x 19, podemos presentar de inmediato el siguiente tablero también:

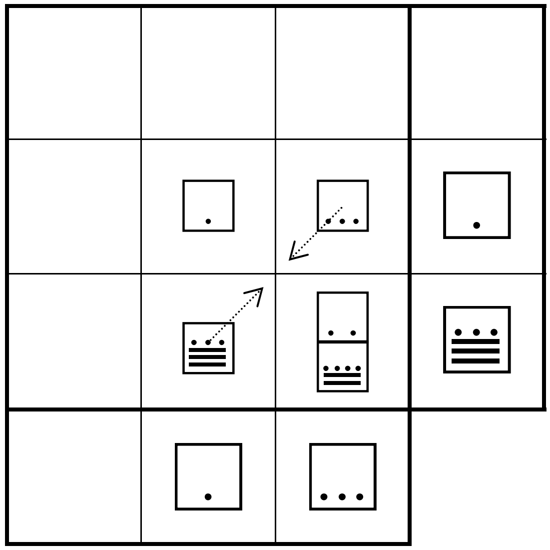


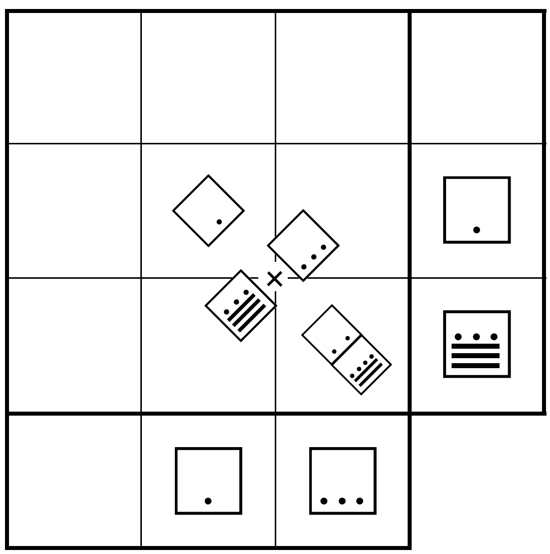
Por fin, hagamos la multiplicación 23 x 38.

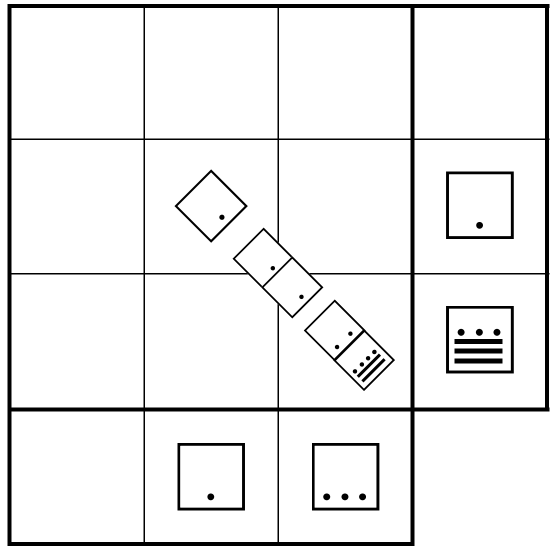


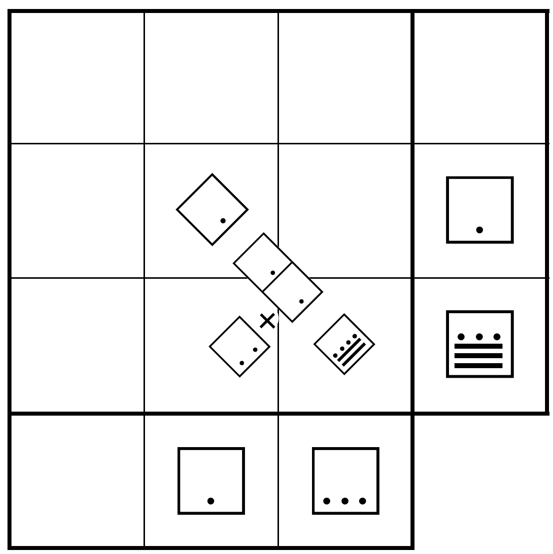


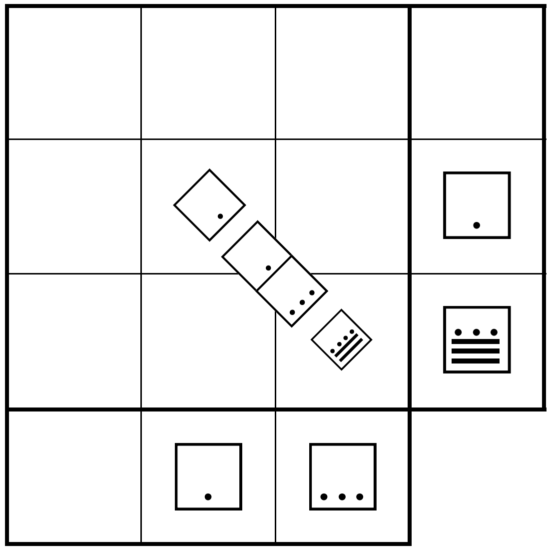
Otra vez, sumamos sobre los diagonales:

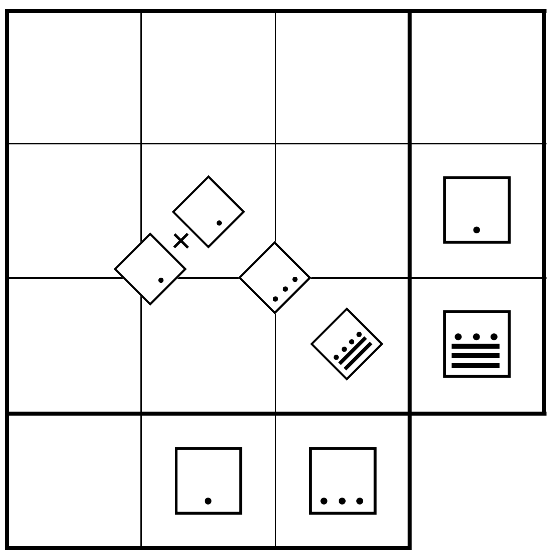


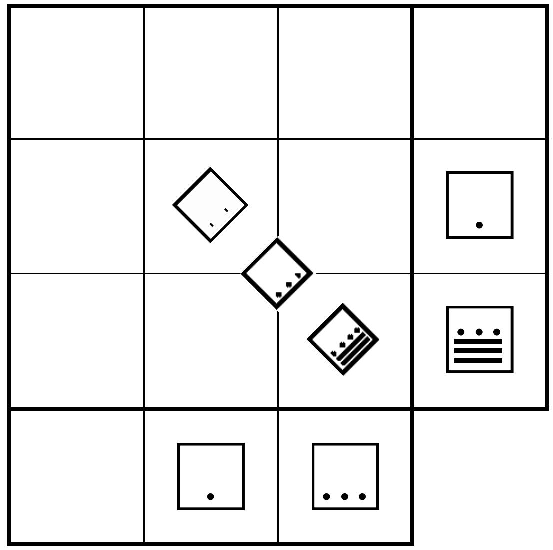




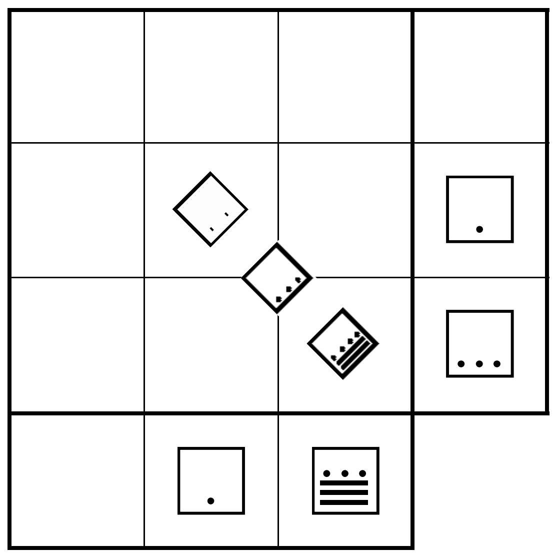








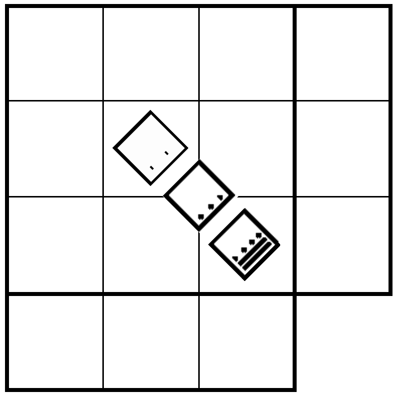
Pero 23 x 38 = 38 x 23, luego el siguiente tablero también:



Queremos pausar a menudo para examinar nuestros, con fines de encontrar patrones que surgieren conjeturas.

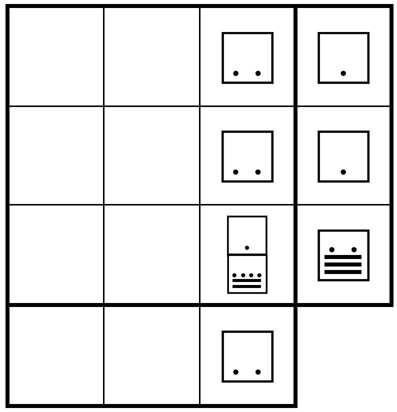
Una pausa para examinar lo que hemos hecho

Ya hemos visto que el mismo producto

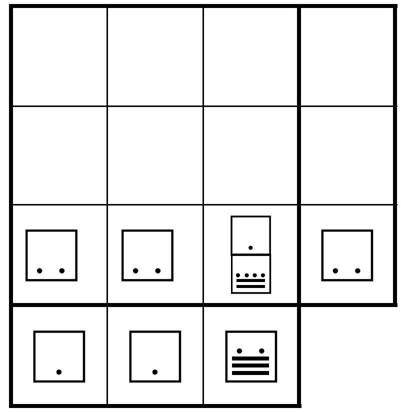


puede ser el resultado final de los siguientes seis órdenes iniciales distintos:

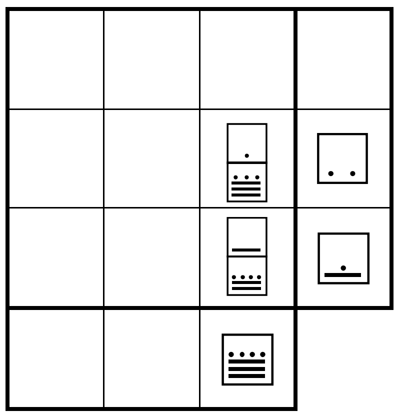
2 x 437



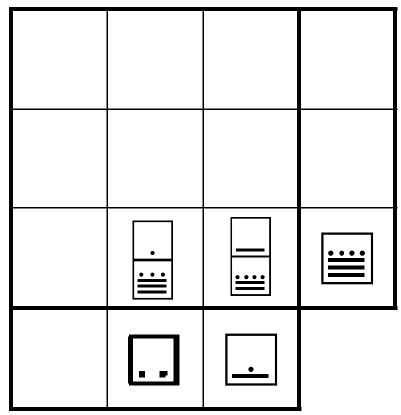
437 x 2



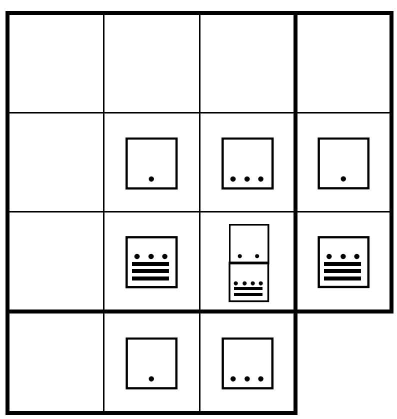
19 x 26



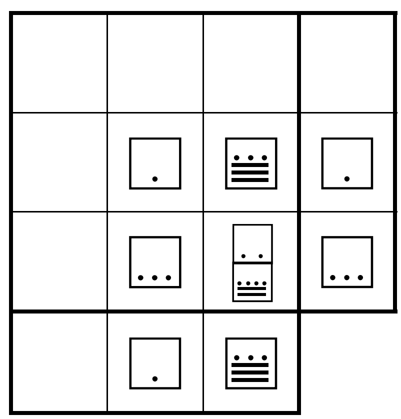
26 x 19



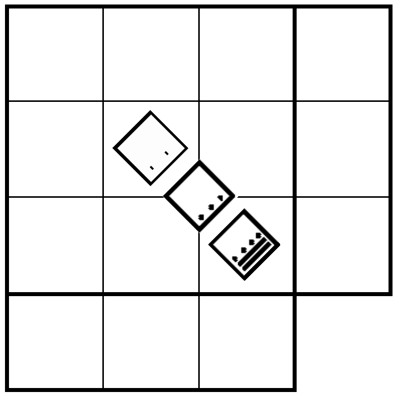
23 x 38



38 x 23



Para ayudar al lector a comparar estos tableros con el resultado, lo presento de nuevo.

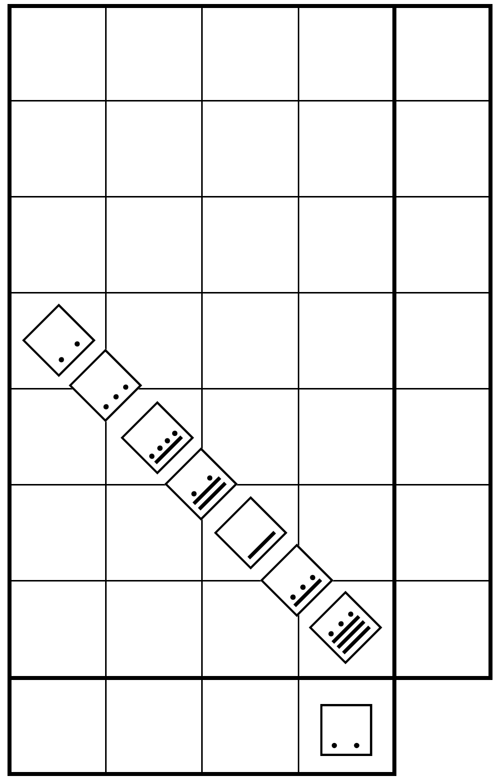


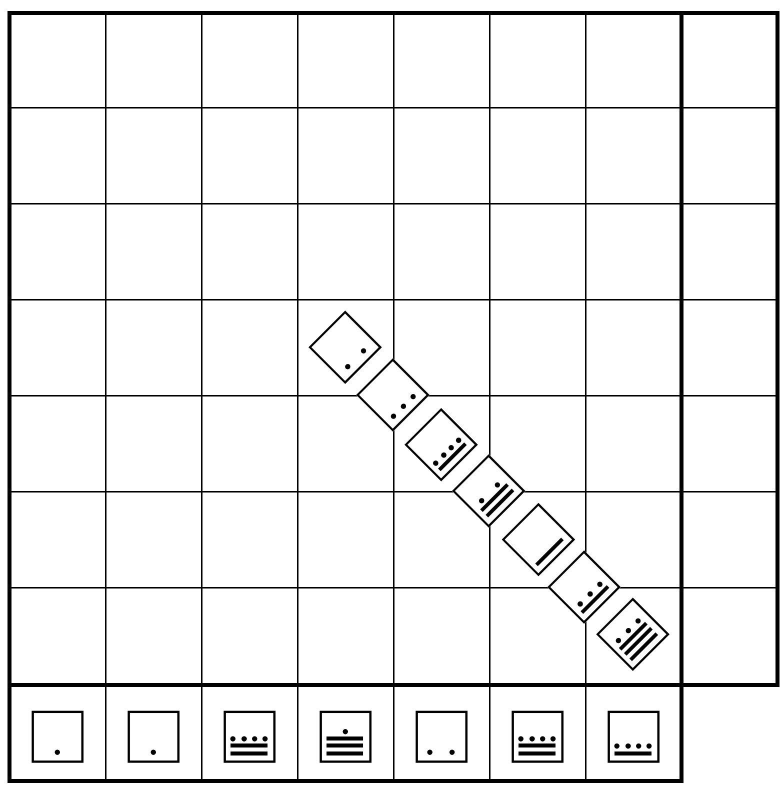
Ya es la hora de hacer unas cuantas observaciones. Entre ellas figuran las siguientes, en cuanto a de dónde vino la cifra en el lugar de los jboks, del producto. Es decir, la cifra .

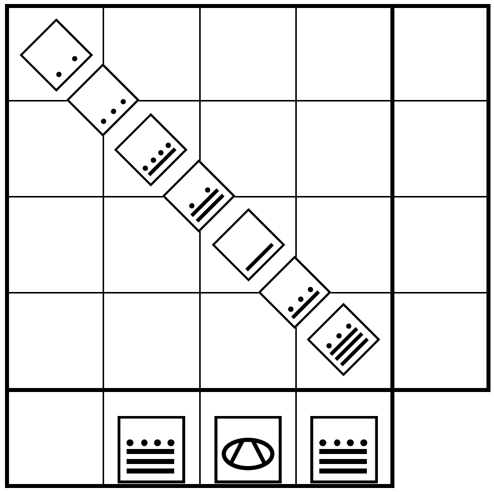
- En el caso de los multiplicandos 2 y 437, fue simple y sencillamente el producto de los las unidades de un multiplicando y los jboks del otro.

- En los casos de los multiplicandos 19 y 46, y 23 y 38, fue el resultado de las multiplicaciones de los dígitos de estos, más las maniobras necesarias para “ordenar” la respuesta.

Con base en estas observaciones, ¿cómo se podría identificar el primer dígito del multiplicando faltante en los siguientes tres casos? El producto es igual a 2 x 19 x 23 x 397 x 401. Sabemos por qué los factores 2, 19, y 23. Agregué el 397 porque éste es el mayor número primo de dos dígitos en el sistema maya, y el 401 porque éste es el menor número primo de 3 cifras en el sistema maya.







FIN