Para aclarar varias dudas acerca del desarrollo de fórmulas para derivadas

"De las buenas intenciones está empedrado el camino del Infierno."

Con frecuencia, y con las mejores intenciones, los autores de libros de texto de matemáticas omiten detalles importantes al desarrollar fórmulas para derivadas. Los omiten para "simplificar" los desarrollos, pero como resultado, los desarrollos suelen ser incompletos, aun incorrectos.

Entonces, con razón que los desarrollos, en las más de las veces, les infunden a los alumnos confusión y ansiedad.

En este documento, se presentan desarrollos para dos fórmulas para derivadas. Se incluyen detalles y justificaciones importantes que por lo general, se omiten. Además, se describe el papel que tuvieron los alumnos en el desarrollo del cálculo tal como lo conocemos hoy en día: en su forma original, desarrollada por Newton entre otros, había fallas innegables de la lógica. El impulso por ponerle al cálculo sus bases rigurosas actuales vino en parte de los profesores que tuvieron que aclarar las dudas de sus alumnos.

En este capítulo:

- **Conceptos claves, que con frecuencia no se mencionan a los alumnos**
  - Las Reglas de la "Especificación Universal", y de la "Generalización Universal"
  - La diferencia entre "incógnitas" y "variables en una relación funcional"
- **¿Por qué se usan los "límites" y las "demostraciones ϵ - δ" en el desarrollar de fórmulas para derivadas?**
- **Los desarrollos para dos fórmulas para derivadas**

- La derivada, con respecto a "**t**", de "$z = ct^2$", donde "**c**" es un constante
- La derivada, con respecto a "**t**", del producto de dos funciones de "**t**".

Conceptos claves, que con frecuencia no se mencionan a los alumnos

Las Reglas de la "Especificación Universal", y de la "Generalización Universal"

Mis maestros de matemáticas de la prepa me habrían ahorrado mucho tiempo en mis clases posteriores, si me hubieran enseñado estas dos reglas.

La Regla de la Especificación Universal

Para nuestros fines, ésta declara que

> Si *todos* los objetos de un conjunto tienen ciertas características, entonces *cada* objeto del conjunto tiene estas características.

Puede que esta regla sea obvia, pero es importante declararla clara y explícitamente. A modo de ejemplo del uso de esta regla, consideremos el conjunto de todos los números no iguales a cero. Todos estos números cuentan con la siguiente propiedad:

$$(Un\ número) \div (El\ mismo\ número) = 1.$$

Por ejemplo, 5 ÷ 5 = 1.

Ya que todos los números del conjunto cuentan con dicha propiedad, La Regla de la Especificación Universal hace lícito decir que si **x** es algún número específico, no igual a cero, entonces **x** ÷ **x** = 1.

La otra cara de la moneda es …

La Regla de la Generalización Universal

Para nuestros fines, ésta declara que

> Si se demuestra que una proposición [en nuestro caso, una fórmula] es cierta para un objeto, elegido en forma arbitraria, de un conjunto, entonces la proposición se verifica para todo objeto del conjunto.

Aunque esta regla no necesariamente sea obvia, es lícito darla por sentado. Para ilustrar cómo se emplea en las demostraciones de teoremas o desarrollos de fórmulas, consideremos todos los llamados "números reales".

Con frecuencia en las matemáticas, nos conviene simplificar expresiones como

$$2x + 3x\ ,$$

siendo **x** un número real, cuyo valor lo desconocemos. De seguro, debe ser cierto que

$$2x + 3x = 5x\ .$$

A decir verdad, la proposición

$$(El\ número) \div (El\ mismo\ número) = 1.$$

es, en sí, una suposición. O mejor decir, se desprende del llamado "Postulado del inverso de la multiplicación":

$$Si\ a \neq 0, entonces\ a \times \frac{1}{a} = 1.$$

La acepción de **postulado** que es relevante aquí deja claro que un postulado es, en verdad, una suposición:

> "Proposición cuya verdad se admite sin pruebas y que sirve de base para razonamientos posteriores." (*del Gran diccionario de la Lengua Española, por Larousse.*)

A veces se emplea la palabra **axioma** en vez de **postulado**.

Los "números reales" abarcan todos los números enteros, decimales, y fraccionarios, sean éstos positivos, negativos, o cero.

Pero ¿cómo podemos **demostrar** que esto es cierto? Bueno, empezamos por decir

Sea **a**, arbitrario, algún número real.

¡Fíjate que no podemos elegir cuál número es! Solo se nos permite decir que es algún número.

Ahora, consideremos la expresión

$$2a + 3a$$

Porque **a** es un número real, amén de los números 2 y 3, La Propiedad Distributiva se verifica para ellos, de manera que

$$2a + 3a = (2 + 3)a \ ,$$

o sea, que

$$2a + 3a = 5a \ .$$

Para terminar, nos apoyamos en La Regla de la Generalización Universal, para decir

Siendo cierto que **2a + 3a = 5a** para **a**, arbitrario, dicha relación es cierta para todo valor posible de **a**, o sea, para todos los números reales. Por lo tanto, si **x** es un número real,

$$2x + 3x = 5x \ .$$

A propósito, al decir, unos cuantos pasos atrás, que "La Propiedad Distributiva se verifica para los números **a**, 2, y 3, porque son números reales", nos valimos de La Regla de la Especificación Universal. Esto fue un ejemplo de una maniobra común en las demostraciones, el uso, conjunta o en alternativamente, de Las Reglas de la Especificación Universal, y de la Generalización Universal.

La diferencia entre "incógnitas" y "variables en una relación funcional"

Desafortunadamente, en los libros de texto vienen muchas demostraciones o desarrollos en los que el significado de una variable es cambiado sin aviso a los alumnos. Peor todavía, algunas ecuaciones emplean una misma variable con más de un significado. Es más, estas ambigüedades están presentes en la mayoría de las versiones tradicionales del las fórmulas para derivadas. Estas tendencias deberían evitarse en lo posible, pero a veces no es practicable.

Ante esta situación, es importante que el alumno pueda reconocer un uso ambiguo del una variable. También, es importante que sepa cómo las variables deberían usarse en los desarrollos.

A modo de ilustración, consideremos una de las funciones cuya derivada la encontremos posteriormente:

$$z = ct^2 \ ,$$

donde **c** es una constante.

Por inocente que parezca esta ecuación, ella nos llevará a muchas confusiones si no aclaramos, desde un principio, su significativo. A sorpresa de muchos alumnos, en esta ecuación **z** y **t** no son incógnitas.

En cambio, son lo que algunos maestros de matemáticas llaman variables en una relación funcional. Para explicar mejor este concepto, consideramos la bien conocida fórmula

$$Área = \pi r^2 .$$

Nosotros, los laicos, la llamamos una fórmula, pero los matemáticos la llaman una relación funcional entre las variables **Área** y **r**.

Con frecuencia, con fines de evitar posibles ambigüedades, se escribe la relación funcional como en siguiente ejemplo:

$$Área(r) = \pi r^2 ,$$

el cual indica claramente que la variable independiente es **r**.

La definición completa de una función debe especificar los valores permisibles para la variable independiente. (Hay otros detalles al respecto, pero no son importantes aquí.) En el caso presente, porque pueden existir circunferencias de cualquier tamaño, **r** puede ser cualquier número igual a o mayor que cero. Nótese que una circunferencia de radio cero no es sino un punto.

En la próxima sección, desarrollaremos la fórmula para la derivada, con respecto a **t**, de $\mathbf{ct^2}$. Nos convendrá emplear la relación funcional $\boldsymbol{z = ct^2}$. Sin duda, Ud. notará que esta relación funcional tiene la misma forma que $Área = \pi r^2$. A saber, el valor de la variable dependiente es el producto de un constante con la cuadrada del valor de la independiente. Hay muchos problemas reales en los que la relación entre las cantidades que juegan obedece a una "fórmula" tal. Sin embargo, en muchos de estos fenómenos, a diferencia del caso de la función $Área = \pi r^2$, la variable independiente puede tomar valores cero o negativos, además de valores positivos.

Por ejemplo, los cables de un puente colgante toman la forma de una parábola.

Acerca de las fórmulas

Cada fórmula es una constancia, escrita en el idioma de las matemáticas, de la relación que se verifica entre algunas de las características de una cosa o un fenómeno. Las variables que figuran en una fórmula son medidas de dichas características. Por lo tanto, son números.

En el caso entre manos,

$$Área = \pi r^2$$

es la relación entre dos características de una circunferencia: su radio, y la extensión de superficie que la circunferencia encierra. Ni la una ni la otra de estas cantidades es una incógnita: cada circunferencia tiene cierto radio (lo midamos o no), y encierra cierta extensión de superficie (la midamos o no). La relación entre estas cantidades es, de hecho

$$Área = \pi r^2 .$$

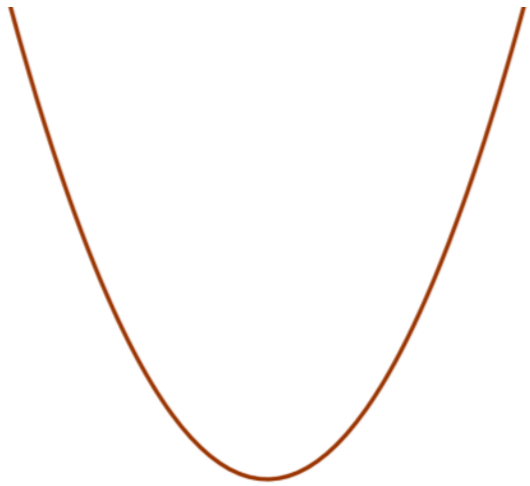
aunque este hecho no nos interese en absoluto.

Según los costumbres de los matemáticos, la variable en el lado izquierdo de la relación funcional es la variable dependiente. Entonces, en la relación funcional

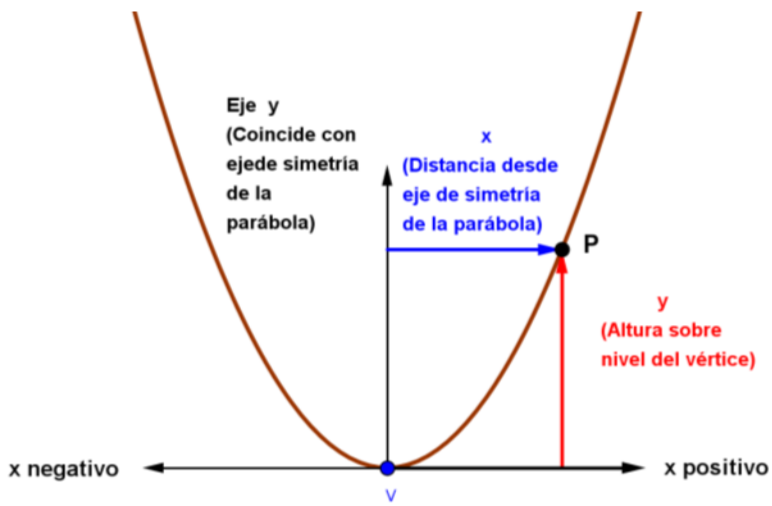
$$z = ct^2 ,$$

Se entiende que z es la variable dependiente.

En contraste, ***t*** es la variable **in**dependiente.



Si queremos poner coordenadas a cada punto de la parábola, tenemos que empezar por elegir algún punto de referencia (el "origen"). Digamos que elegimos el vértice (**V**) de la parábola como el origen, y el eje de simetría de la parábola como el eje **y** en un sistema cartesiano de referencia:



Con esta elección de sistema de referencia, la relación funcional entre las coordenadas **x** y **y** de los puntos que pertenecen a la parábola será

$Coordenada\ y = C \times (Coordenada\ x)^2$, donde **C** es un constante.

Escrita de la forma usual, esta última ecuación es

$y = Cx^2$.

Nótese que esta relación se verifica aun para los puntos a la izquierda del eje **y**, todos de los cuales tienen coordenadas "**x**" negativas.

En el idioma de los matemáticos, el conjunto de los valores que la variable independiente puede tomar se llama **el dominio** de la función. Hablaremos más sobre ello en secciones posteriores.

¿Por qué se usan los "límites" y las "demostraciones ϵ - δ" en el desarrollo de fórmulas para derivadas?

A sorpresa de mucho alumnos, Newton y los otros matemáticos que inventaron el cálculo hacia el año 1670 nunca fundamentaron sus obras rigorosamente. En verdad, no vieron por qué hacerlo: con el cálculo "ingenuo" que ellos inventaron, pudieron resolver problemas tan difíciles como la predicción de los movimientos de los planetas. Los matemáticos del siglo posterior a Newton tampoco vieron por qué poner bases rigorosos al cálculo. Estos matemáticos, también, resolvieron problemas importantes sin molestarse por apoyar sus fórmulas en teoremas sobre límites, etc.

Entonces, ¿por qué el cálculo actual lo hace? Hay cuatro razones.

Primero, el cálculo ingenuo tuvo fallas de la lógica. Un obispo y filósofo inglés, Berkeley, las señaló en una obra que publicó en 1734. Por más que los matemáticos ilustres del siglo XVIII trabajaron para dar una respuesta satisfactoria a las críticas que hizo Berkeley, no lo pudieron.

Sin embargo, los matemáticos de aquel entonces no se preocuparon de esta situación. Sus muchos y magníficos resultados pudieron verificarse, y esto es lo que les importó. Pero –esta es la segunda razón- para el año 1775, algunos matemáticos reconocieron que el cálculo ingenuo no fue suficiente para la resolución de los nuevos problemas con los que se enfrentaban.

La tercera razón es que hacia fines del siglo XVIII, y posteriormente, cada vez más matemáticos tuvieron que dar clases en las universidades o academias militares, además de llevar investigaciones sobre las matemáticas mismas. El enseñar le obliga al maestro hacer preguntas básicas acerca de la naturaleza de los conceptos más importantes. Así que mucho del fundamento lógico que le pusieron al cálculo los matemáticos del siglo XIX, nació mientras ellos impartían cursos del cálculo. Entre estos maestros figuraron del tallos de Weierstrass, Dedekind, y –sobre todo- Cauchy.

La cuarta razón por la que el cálculo actual fundamenta sus teoremas acerca de derivadas e integrales en "límites", y define los "límites" en términos de desigualdades con "**ϵ**" y "**δ**", es que el álgebra de las desigualdades ya era una ciencia madura y bien conocida cuando los matemáticos se sintieron, por fin, la necesidad de ponerle fundamentos rigurosos al cálculo. Es más, resultó a ser suficiente para la tarea.

Bueno, entonces, ¿qué es necesario para demostrar, por ejemplo, que

$$\text{lím}_{t\to b}[f(t)] = L\ ?$$

Solo es necesario demostrar que se puede procurar que el valor de **f(t)** sea tan cerca de **L** como se quiera, por restringir el valor a un intervalo lo suficientemente estrecho, que incluya a **b**. Para realizar esta demostración, los matemáticos nos recetan el siguiente procedimiento:

Sea **ϵ**, arbitrario, un número positivo tan pequeño como se quiera, pero no cero.

Demostrar que existe un número positivo **δ**, no igual a **b**¸ tal que para todo **t** en el intervalo **b - δ** < **t** < **b - δ**, se verifica que |**f(t)** - **L**| < **ϵ**.

Por ejemplo, si quisiéramos demostrar que

$\lim_{t \to 3}[2t] = 6$,

tendríamos que decir algo por el estilo de

Sea **ϵ**, arbitrario, un número positivo tan pequeño como se quiera, pero no cero.

Se verifica que

$|2t - 6| < \epsilon$

para todo valor de **t** tal que

$|t - 3| < \frac{\epsilon}{2}$.

Con esto, queda demostrado que para **ϵ**, arbitrario existe un **δ** (en este caso, el **δ** es $\frac{\epsilon}{2}$) tal que si |**t** - 3| < **δ**, entonces |2**t** - 6| < **ϵ**. Por lo tanto, queda demostrado que

$\lim_{t \to 3}[2t] = 6$.

Muchas de las funciones cuyos límites nos interesa encontrar son sumas, productos, potencias, etc. de funciones más simples. Por lo tanto, los matemáticos han desarrollado fórmulas para casos tales. Nos valdremos de algunas de estas fórmulas a continuación.

Nótese que de costumbre, la condición

b - δ < **t** < **b - δ**

se escribe de la forma

|**t** - **b**| < **δ**.

Unos cuanto detalles que se apoyan en el álgebra de las desigualdades.

$|2t - 6| < \epsilon$

es equivalente a

$-\epsilon < 2t - 6 < \epsilon$.

Ésta se puede trasformar en

$3 - \frac{\epsilon}{2} < t < 3 + \frac{\epsilon}{2}$,

la cual se puede trasformar en

$-\frac{\epsilon}{2} < t - 3 < \frac{\epsilon}{2}$,

misma que es equivalente a

$|t - 3| < \frac{\epsilon}{2}$.

Los desarrollos para fórmulas que tratan las derivadas

En la sección previa, vimos que en algunos problemas reales, no todos los valores posibles de la variable son relevantes. Por ejemplo, valores negativos de **r**, cuando ésta representa el radio de un círculo. Sin embargo, al desarrollar la fórmula para una derivada, es aconsejable desarrollar una que se verifique para el dominio más amplio posible de la variable independiente, para que nuestra fórmula aplique al abanico más amplio de problemas. De preferencia, el dominio para la variable independiente sería el conjunto de todos los números reales.

Fíjese que para las derivadas de algunas funciones, no es posible encontrar una fórmula tal. Por ejemplo, la derivada de la función $y = \frac{1}{x}$ es $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, cuyo valor no es definida en **x** = 0 (es "infinita").

Bueno, ya estamos sobre aviso: la fórmula que buscamos (es decir, una que sea cierta para todo valor posible de la variable independiente) no necesariamente existe. Pero en caso de sí, ¿cómos podemos desarrollarla? A ver …

Acuérdese, por favor:
La tasa promedia de variación de z con respecto a t, entre $t = a$ y $t = a + \delta$, es

$$\left[\frac{z(a+\delta)-z(a)}{\delta}\right].$$

Esta tasa promedia es igual a la pendiente de **la recta azul** en nuestra figura.

Conforme δ tiende a cero, (y por lo mismo, conforme la distancia "δ" in nuestra figura se disminuye) la recta azul se alinea más con **la recta roja**.

Esta última es tangente a la curva en el punto cuya coordenada x es a. La pendiente de la recta roja es igual a la tasa instantánea de variación de z con respecto a t, cuando $t = a$.

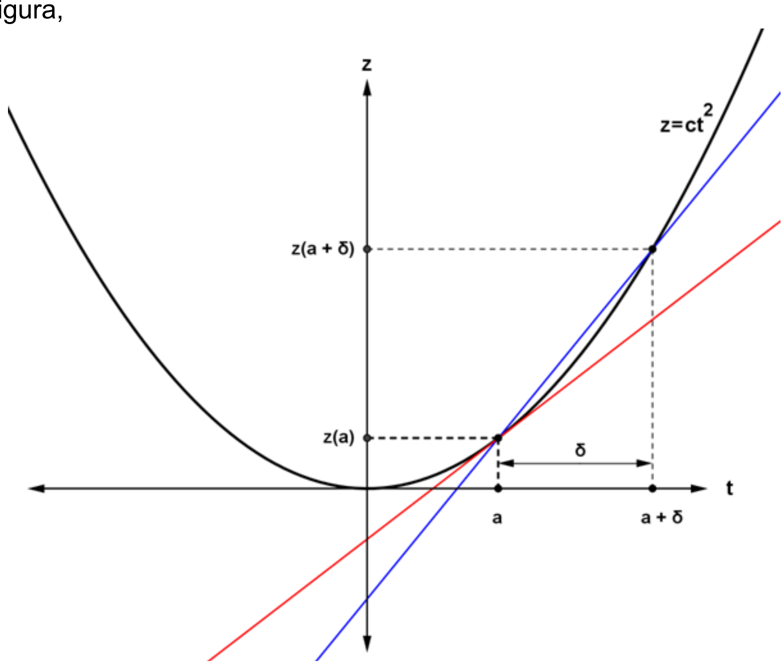
Esta misma tasa instantánea es el valor de la derivada de z con respecto a t, cuando

Desarrollo de la fórmula para la derivada, con respecto a t, de $z = ct^2$, donde "c" es constante

Nuestra estrategia será

- Desarrollar para **a**, un número real arbitrario, una fórmula para el valor que tiene la derivada de **z** con respecto a **t**, cuando **t** = **a**;
- Con base en La Regla de la Generalización Universal, reconocer que siendo cierta para el número arbitrario **a**, nuestra fórmula es cierta para todos los valores posibles de **a**. O sea, que la fórmula es correcta sin importar el valor de **a**.

Bueno, sea **a**, arbitrario, un número real. Con referencia a la siguiente figura,



la derivada de **z**, con respecto a **t**, cuando **t** = **a**, es igual a la pendiente de la línea roja. La pendiente de la línea azul se acercará a la de la roja, conforme **δ** se disminuye.

Ahora, por motivos que se presentarán pronto, introducimos la siguiente notación para representar "la derivada de **z**, con respecta a **t**, cuando **t** = **a**":

$$(La\ derivada\ de\ \boldsymbol{z}, con\ respecto\ a\ \boldsymbol{t})|_{t=a}\ .$$

Según la definición de la derivada,

$$\begin{aligned}(La\ derivada\ de\ \boldsymbol{z},\ con\ respecto\ a\ \boldsymbol{t})|_{t=a} &= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{z(a+\delta)-z(a)}{\delta}\right]\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{c(a+\delta)^2-ca^2}{\delta}\right]\\ &= \lim_{\delta\to 0}[2ca + c\delta]\end{aligned}$$

Aprovechemos esta oportunidad para repasar algunos teoremas acerca de los límites. Primero, el límite de una suma de términos es la suma de sus respectivos límites. Por lo tanto,

$$\lim_{\delta\to 0}[2ca + c\delta] = \lim_{\delta\to 0}[2ca] + \lim_{\delta\to 0}[c\delta] \ .$$

Porque **a** es un número específico (aunque desconocido), 2**ca** es una constante. El límite de una constante es la constante misma, por lo que

$$\lim_{\delta\to 0}[2ca] = 2ca \ .$$

El límite de un producto de factores es el producto de sus respectivos límites. Entonces,

$$\lim_{\delta\to 0}[c\delta] = \{\lim_{\delta\to 0}[c]\}\{\lim_{\delta\to 0}[\delta]\}$$

Porque **c** es una constante,

$$\lim_{\delta\to 0}[c] = c.$$

Es más,

$$\lim_{\delta\to 0}[\delta] = 0.$$

Así que

$$\lim_{\delta\to 0}[c\delta] = 0.$$

Total,

$$\lim_{\delta\to 0}[2ca + c\delta] = 2ca \ ,$$

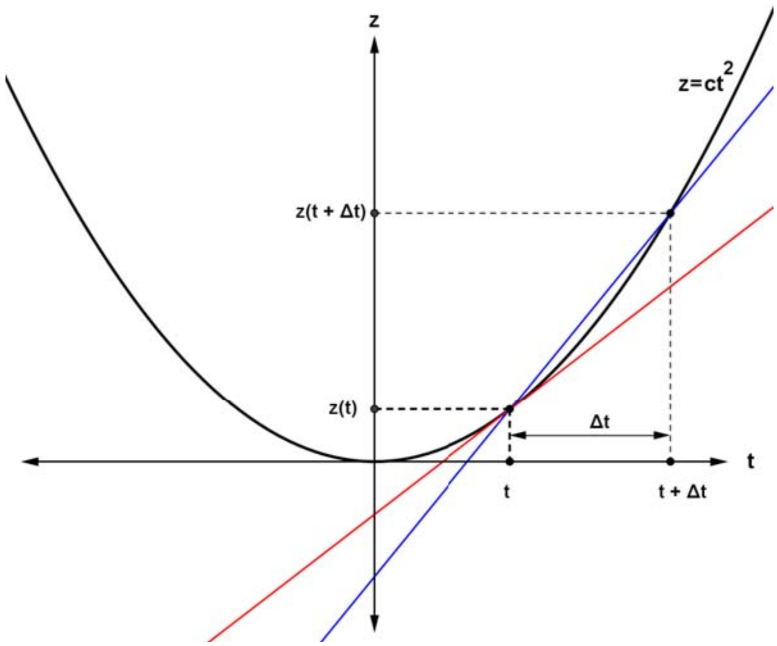
de manera que

$$\left(La\ derivada\ de\ \boldsymbol{ct^2},\ con\ respecto\ a\ \boldsymbol{t}\right)\Big|_{t=a} = 2ca \ .$$

Siendo cierta para **a**, arbitrario, nuestra fórmula se verifica para todos los números reales. Eso por La Regla de la Generalización Universal.

En este momento, es razonable preguntar por qué no fue necesario especificar que **δ** fue algún número arbitrario. La respuesta: Es que no usamos valor alguno de **δ** en el desarrollo. Solo sostenemos (con base en los teoremas acerca de límites de sumas y productos) que por elegir un valor lo suficientemente pequeño de **δ**, puede lograrse que $\left[\frac{z(a+\delta)-z(a)}{\delta}\right]$ sea tan cerca como se quiera, al valor que declaramos es el valor de la derivada cuando **t** = **a**.

Contrastemos el desarrollo que acabamos de realizar, con aquella que suele presentarse en los libros de texto. Por lo general, estos desarrollos parten de una figura como la siguiente:



Como el primer paso del desarrollo, se escribe

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right].$$

Con esto, estamos en dificultades de inmediato, porque no todos los símbolos "**t**" se refieren a la misma cosa. Me explicaré, pero primero, para facilitar la explicación, escribiré los "**t**" de diferentes colores:

Se ve que es fuente potencial de confusiones, este uso de un mismo símbolo para representar la variable independiente, y a la vez para representar un valor específico de ésta.

$$\frac{dz}{d\boldsymbol{t}} = \lim_{\boldsymbol{\Delta t} \to 0}\left[\frac{z(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t})-z(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\Delta t}}\right].$$

Ahora, miremos lo que significa cada "**t**":

- **t**: El uso del símbolo **t** en "denominador" del símbolo $\frac{dz}{dt}$ nos comunica que la derivada de **z** es con respecto a **t**. Nada más.
- **t**: Ésta es nuestra "**a**". Es algún valor arbitrario, pero <u>especifico</u>, de la variable **t**.
- **Δt**: Ésta es nuestra **δ**.

A continuación, en el desarrollo usual, se escribe

$$\frac{dz}{d\boldsymbol{t}} = \lim_{\boldsymbol{\Delta t} \to 0}\left[\frac{z(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t})-z(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]$$

$$= \lim_{\boldsymbol{\Delta t} \to 0}\left[\frac{c(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t})^2-c\boldsymbol{t}^2}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]$$

$$= \lim_{\boldsymbol{\Delta t} \to 0}[2c\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta t}]$$

$$= 2c\boldsymbol{t}.$$

En resumen, $\frac{dz}{d\boldsymbol{t}} = 2c\boldsymbol{t}$. Porque **z** = **ct**^{2},

$$\frac{d}{d\boldsymbol{t}}(ct^2) = 2c\boldsymbol{t},$$

En el idioma de las matemáticas, hay varias maneras de comunicar "la derivada".

A modo de ejemplo, consideremos nuestra función

$z = ct^2$.

Todas las siguientes expresiones son aceptables para comunicar "la derivada de *z*, con respecto a ***t***:"

$\frac{dz}{dt}$, $\frac{d}{dt}z$, $\frac{d}{dt}(z)$, $\dot{z}$, z', $\frac{d(ct^2)}{dt}$, $\boldsymbol{\frac{d}{dt}(ct^2)}$.

donde el “**t**” en $\mathbf{ct^2}$ no se refiere a ningún valor específico de la variable independiente; solo es el símbolo que la representa.

Contrastemos las dos fórmulas que hemos desarrollado:

- $\left(La\ derivada\ de\ \boldsymbol{ct^2},\ con\ respecto\ a\ \boldsymbol{t}\right)\Big|_{t=a} = 2ca$.
- $\frac{d}{dt}(ct^2) = 2ct$.

Si reflexionamos sobre la primera, veremos que ésta nos comunica, más o menos claramente, que el valor de la derivada depende del valor de **t**. A saber, el valor de la derivada es igual a 2**c** por el valor de **t.** Esta información es exactamente lo que la segunda fórmula quiere comunicarnos también. Solamente tenemos que saber “descifrar” este escrito.

La segunda fórmula es más breve, y tiene otras ventajas que no mencionaremos aquí. Por eso, es la versión estándar de la fórmula para la derivada. El uso ambiguo del símbolo **t** en fórmulas para derivadas no presentará ningún estorbo si el alumno mantiene en la mente que

> “ $\frac{d}{dt}(ct^2) = 2ct$ ”
>
> quiere decir que “El valor de la derivada de $\mathbf{ct^2}$, con respecto a **t**, es igual a 2**c** por el valor de **t**.”

Para rondear esta discusión, cabe señalar que 2**ct** (la derivada de la función $\mathbf{ct^2}$) es, en sí, una función de **t**.

La derivada, con respecto a “t”, del producto de dos funciones de “t”.

Los libros de texto nos dicen, acertadamente, que es molesto partir de la definición de la derivada para encontrar fórmulas para las derivadas de funciones complejas, como **w(t)** = $\mathbf{t^3}$**sen(t)**. Por lo tanto, los matemáticos han desarrollado un estuche de herramientas para casos tales.

Según las normas del idioma de las matemáticas, un producto de funciones se puede escribir sin corchetes. Entonces

$w(t) = [u(t)][v(t)]$

se puede escribir

$w(t) = u(t)v(t)$.

Es más, si el contexto deja claro cuál es la variable independiente, podemos prescindirnos de escribirla

$w = uv$.

Una de estas herramientas es la fórmula para la derivada de una función que es el producto de dos funciones más simples. Por ejemplo, la función **w(t)** = $\mathbf{t^3}$**sen(t)** es el producto de las funciones **u(t) =** $\mathbf{t^3}$ y **v(t) = sen(t)**. Es decir,

$$w(t) = [u(t)][v(t)] .$$

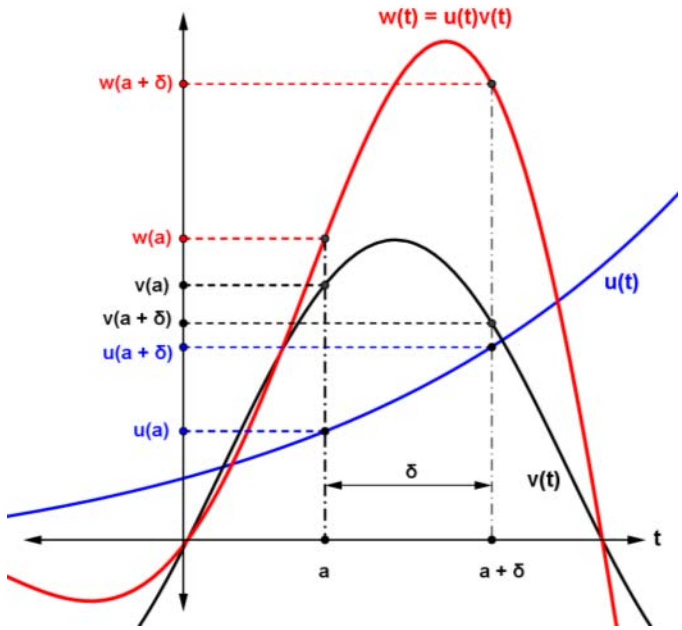
La fórmula para la derivada de **w**, sí, l tendremos que desarrollar a partir de la definición.

Bueno, sea ***C*** el dominio de la función **w**, y sea **a**, arbitrario, un elemento de ***C***. Según la definición de la derivada,

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=a} = \lim_{\delta\to 0}\frac{w(a+\delta)-w(a)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)][v(a+\delta)]-[u(a)][v(a)]}{\delta} .$$

Por si nos ayuda, aquí tenemos un diagrama para guiarnos:



Antes de que sigamos adelante, debemos precisar que **δ** sea un número tal que **a** + **δ** sea un elemento de los dominios todas las tres funciones **u**, **v**, y **w**.

Ahora, tenemos que maniobrar un poco para poner el resultado previo, a saber

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{[u(a+\delta)][v(a+\delta)]-[u(a)][v(a)]}{\delta}$$

en una forma que trate de cantidades como **[u(a + δ) - u(a)]** y **[v(a + δ) - v(a)]**. La maniobra que presento aquí es poco inspirada, pero se entiende fácilmente. Primero, reconocemos que

$$u(a+\delta) = \{[u(a+\delta)-u(a)]+u(a)\}\text{ , y}$$

$$v(a+\delta) = \{[v(a+\delta)-v(a)]+v(a)\}\text{ ,}$$

por lo que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{[u(a+\delta)][v(a+\delta)]-[u(a)][v(a)]}{\delta}$$

puede trasformarse en

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\{[u(a+\delta)-u(a)]+u(a)\}\{[v(a+\delta)-v(a)]+v(a)\}-[u(a)][v(a)]}{\delta}.$$

Si se desarrollan los productos, para luego simplificar las expresiones y agrupar términos semejantes, se obtiene

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{[u(a)][v(a+\delta)-v(a)]+[v(a)][u(a+\delta)-u(a)]+[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta},$$

la cual es igual a

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}+\lim_{\delta\to 0}\frac{[v(a)][u(a+\delta)-u(a)]}{\delta}+$$
$$\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\ .$$

Porque **a** es un número específico, **u(a)** y **v(a)** son constantes. Por lo tanto, el resultado anterior es igual a

$$[u(a)]\left\{\lim_{\delta\to 0}\frac{[v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\right\}+[v(a)]\left\{\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)]}{\delta}\right\}.$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\ .$$

Los otros dos límites, si existen, son las derivadas de **v** y de **u**. Concretamente,

$$\text{lím}_{\delta\to 0}\frac{[v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}=\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a},\quad \text{y}\quad \lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)]}{\delta}=\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=a}.$$

En consecuencia, a esas alturas hemos demostrado que

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=a}=[u(a)]\left[\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a}\right]+[v(a)]\left[\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=a}\right]$$
$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\ .$$

Ahora, tratemos el último término de esta expresión. Hacemos la trasformación

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\left\{(\delta)\left[\frac{[u(a+\delta)-u(a)]}{\delta}\right]\left[\frac{[v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\right]\right\}$$
$$=\{\lim_{\delta\to 0}(\delta)\}\left\{\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{[u(a+\delta)-u(a)]}{\delta}\right]\right\}\left\{\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{[v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}\right]\right\}.$$
$$=\{\lim_{\delta\to 0}(\delta)\}\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a}\right\}\left\{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=a}\right\}.$$

¿Para qué se realiza esta trasformación?
Para poder emplear las fórmulas acerca de límites. En este caso, la fórmula para el límite de un producto.

El primer factor en este último ($\lim_{\delta\to 0}(\delta)$) es cero. Entonces, si las derivadas de **u** y de **v** existen,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{[u(a+\delta)-u(a)][v(a+\delta)-v(a)]}{\delta}=0\ .$$

Total,

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=a}=[u(a)]\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a}\right\}+[v(a)]\left\{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=a}\right\},$$

con tal que $\left\{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=a}\right\}$ y $\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a}\right\}$ existen.

Siendo cierta para **a**, arbitrario, nuestra fórmula se verifica para todos los números que pertenecen al dominio de **w**. Eso por La Regla de la Generalización Universal. Según los costumbres de los matemáticos, nuestra fórmula puede escribirse de la siguiente forma breve:

$$\frac{d}{dt}\{[u(t)][v(t)]\} = [u(t)]\left\{\frac{d}{dt}[v(t)]\right\} + [v(t)]\left\{\frac{d}{dt}[u(t)]\right\},$$

con tal que $\frac{d}{dt}[v(t)]$ y $\frac{d}{dt}[u(t)]$ existen para los valores de **t** en juego.

Las normas del idioma de las matemáticas nos permiten escribir esta última de una forma más simple todavía:

$$\frac{d}{dt}uv = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt},$$

con tal que $\frac{dv}{dt}$ y $\frac{du}{dt}$ existen para los valores de **t** en juego.

Para probar esta fórmula, encontremos $\frac{d}{dx}(\mathbf{x}^5)$, por escribir $\mathbf{x}^5$ como el producto de las dos funciones $\mathbf{u = x^2}$ y $\mathbf{v = x^3}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{[x^2][x^3]\} &= [x^2]\left\{\frac{d}{dx}[x^3]\right\} + [x^3]\left\{\frac{d}{dx}[x^2]\right\}\\ &= [x^2][3x^2] + [x^3][2x]\\ &= 5x^4\ .\end{aligned}$$

Este resultado es el mismo que se obtiene por medio de la bien conocida fórmula

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\left[\frac{d}{dx}(x^{n-1})\right].$$